CÁLCULO DIFERENCIAL REAL

Un enfoque con énfasis en sucesiones

Russell Aarón Quiñones Estrella

Cálculo diferencial real

Un enfoque con énfasis en sucesiones

Dr. Russell Aarón Quiñones Estrella

Cálculo diferencial real
Un enfoque con énfasis en sucesiones

de Russell Aaron Quiñones Estrella
Primera edición 2021
ISBN: 978-607-561-092-4

Director Editorial
Mtro. Luis Adrián Maza Trujillo
Diseño de Portada
José Rodolfo Mendoza Ovilla

Impreso y hecho en México
Printed and made in Mexico

Para quién me ha acompañado en toda esta travesía
y me brinda amor y apoyo: ***Marda****.*

Índice general

Introducción

El objetivo principal de esta obra es poder crear un texto adecuado, que pueda acompañar al estudiante durante sus cursos de cálculo diferencial real. Pese a que ya existen diversos textos clásicos de cálculo (al ser éste es un material fundamental para las áreas de ciencias e ingenierías hay por tanto una amplia gama de textos tanto aplicados como teóricos) todos estos requieren un cierto tiempo para ser cubiertos; son pensados más allá de un solo curso, con muchas horas de disposición extra por parte del lector. Lamentablemente las exigencias modernas nos limitan en tiempo, razón por la cual debe hacerse una selección más fina al crear un texto de cálculo que esté pensado para ser guía en el semestre en que dicho material se cursa.

Para el caso particular de física y matemáticas, se requiere un enfoque algo formal y esto implica tener textos aún más exigentes en ciertas direcciones. Dicho formalismo no debe llegar a ser excesivo (por ejemplo al intentar recrear en un principio la teoría formal de conjuntos), debe ser lo *adecuado* a un primer curso formal de cálculo.

La idea primordial de esta obra es ofertar un programa que sea realizable en un semestre, con las exigencias mínimas para sentar en el estudiante bases sólidas en el área, de tal forma que él mismo pueda seguir profundizando en los temas aún después del curso; este es un texto adecuado al curso, tiene exactamente aquella selección de temas necesarios a cubrir en un semestre de la materia de Cálculo 1, que son los que realmente se cubren en la práctica; dotado de una buena cantidad de ejemplos resueltos a detalle y ejercicios (la mayoría de ellos con sugerencias para resolverlos). Este texto además de acompañar al estudiante durante su semestre tiene la capacidad de facilitarle la lectura de cualquier otro texto de cálculo real, en el que el estudiante quiera abarcar otros temas o profundizar en los vistos en el curso (cosa que no se hace en el semestre por cuestión de tiempo). Es importante en este punto mencionar que la idea no es suplantar a los libros clásicos del área de cálculo, más bien apoyar a los estudiantes con un texto base para poder estudiar con más éxito la literatura ya existente.
Cabe mencionar que el texto deriva de las experiencias del autor a lo largo de las veces que ha impartido el curso en la Universidad Autónoma de Chiapas (del 2011 al 2020); a lo largo de ese tiempo y de la interacción con estudiantes, surgieron unas notas de clases que han ido adecuándose según las necesidades del grupo hasta llegar a la forma actual, que pretende ser un libro de texto para el curso.

Es imposible crear un texto de cálculo real sin hacer referencia a las obras clásicas y esta no es la excepción, el lector conocedor podrá ver la influencia de los textos de Apostol [2], de Foster [3] (obra muy usada en Alemania) y por supuesto de la obra mundialemnte reconocida de Spivak [6].

A coninuación se describe brevemente el contenido de este texto, que consta de tres partes, las dos primeras con dos capítulos cada una y la tercera con tres.

La primera parte tiene en el primer capítulo un repaso axiomático del campo de los números reales, las propiedades deben ser conocidas al lector de sus cursos previos, teniendo por diferencia la formalidad de la presentación. Algo que lo distingue de las obras de Apostol [2] y de Spivak [6] es que la lista de axiomas se va dando por bloques temáticos, para que el lector aprecie que consecuencias se derivan del correspondiente bloque de axiomas; esto prepara al estudiante en sus futuros cursos de álgebra moderna y análisis matemático.
El segundo capítulo es el más importante de la obra, pues es el tema central en el que se basan muchas de las pruebas e ideas de los capítulos subseceuntes; se aborda el tema de sucesiones de números reales y se incluye una introducción a la teoría de series convergentes.

La segunda parte contiene un capítulo sobre límites de funciones reales de variable real y un siguiente capítulo de la toería de continuidad del mismo tipo de funciones. El capítulo de límites

contiene las propiedades clásicas de límites y sus propiedades aritméticas, poniendo énfasis tanto en la versión $\varepsilon - \delta$ como en su versión con límites de sucesiones. Algo importante a mencionar es que se da un especial énfasis a los puntos de contacto de subconjuntos de $\mathbb{R}$ para no tener la necesidad de considerar límites laterales.
El capítulo sobre teoría de funciones continuas se centra en el comportamiento de funciones continuas sobre intervalos compactos (intervalos cerrados).

La tercera parte aborda la derivabilidad y diferenciabilidad de funciones reales. El primer capítulo de esta parte contiene los conceptos y propiedades básicas de la derivabilidad sobre conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ y tiene al final una sección dedicada a demostrar la equivalencia entre diferenciabilidad y derivabilidad, cosa que muchas veces se pasa por alto.
El segundo capítulo de esta parte trata sobre las aplicaciones clásicas de funciones derivables: análisis de extremos locales y monotonía; además contiene una sección que complementa lo visto anteriormente sobre la función exponencial y logaritmo.
El tercer capítulo concluye la obra con una aplicación importante de los teoremas de valor medio de Cauchy: La regla de L'Hôpital y sus variantes.

Parte I

Los números reales

1

Los axiomas de $\mathbb{R}$.

Este capítulo incluye una presentación axiomática de los números reales, así como las demostraciones de las consecuencias importantes que se derivan de estos axiomas. Se presupone que el lector ha llevado algún curso de precálculo (introducción al cálculo real), ha llevado una introducción al álgebra y la aritmética, y está familiarizado con téctinas de demostración, como lo es, por ejemplo, la inducción matemática; debe por tanto ver este capítulo como un repaso formal de conceptos ya conocidos.

El enfoque de este capítulo es, en estructura, similar al presenteado en el capítulo 2 del libro [3] del alemán Otto Forster, pues es más conveniente dar los axiomas por grupos y derivar las consecuencias de cada grupo de modo individual; la diferencia principal con la obra de Foster radica en cómo se presenta el axioma de completez y el detalle en las pruebas, que aunque parezca para algunos excesivos, es muy útil para los principiantes en el área teórica de las matemáticas.

1.1. $\mathbb{R}$ y su grupo de axiomas.

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ se pensará conocido (esto es, tendremos un conjunto de *números* ya dado) el cual está dotado con dos operaciones, una llamada suma o adición y otra llamada multiplicación o producto; estas son funciones,

$$
\begin{aligned}
+ :&\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\
\cdot :&\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

las cuales satisfacen ciertos grupos de axiomas que precisaremos más adelante; podemos subdividir dichos grupos de axiomas del siguiente modo:

I) Axiomas de grupo (aditivos).

II) Axiomas de campo (multiplicativos).

III) Axiomas de orden.

IV) Axiomas de completez.

En las siguientes secciones se va a ir repasando dichos grupos de axiomas. En cada secciónse presentará un grupo de axiomas así como sus consecuencias principales con sus correspondientes demostraciones.

Antes de empezar con dicho repaso, se fijará algo de notación. Se escribirá simplemente $a + b$ para la imagen $+(a, b)$ del par (a, b) bajo la función suma, del mismo modo la imagen de dicho par bajo el producto se escribirá simplemente $a \cdot b$ o incluso ab en lugar de $\cdot(a, b)$.

1.2. Axiomas de grupo.

Los axiomas de grupo son cuatro y son referentes a la operación suma, cualquier sistema de números (u objetos) que conste de una sola operación que satisfaga dichos axiomas es llamado grupo (esto se estudia de modo general y con mucha más profundidad en los cursos de álgebra moderna).

A continuación se enlistan los axiomas de grupo.

A1) Ley asociativa: $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

A2) Ley conmutativa: $x + y = y + x$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

A3) Existencia de un neutro aditivo: Existe un elemento $0 \in \mathbb{R}$ tal que: $x + 0 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

A4) Existencia de inversos aditivos (negativos): Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = 0$.

Observación. Aunque en $A3)$ solo se pide que $x + 0 = x$ también se vale que $0 + x = x$, esto es gracias a $A2)$. Lo mismo para el caso de $A4)$, el y (que depende de x) satisface que $x + y = y + x = 0$.

Consecuencias de los axiomas de grupo.

A continuación se dará una lista de consecuencias elementales de los axiomas aditivos enlistados anteriormente; como se darán las demostraciones de dichas consecuencias, estas se enuncian como proposiciones.

Proposición 1.2.1 ***(Unicidad de neutro e inversos aditivos)*** *Respecto al neutro y los inversos aditivos se valen:*

a) El número 0 está completamente determinado por la propiedad del axioma que lo define A3).

b) El inverso aditivo de $x \in \mathbb{R}$ está también únicamente determinado por el axioma que lo define A4).

Demostración: En ambos casos supondremos que existe otro elemento con la misma función y veremos que se trata del mismo.

a) Sea $0' \in \mathbb{R}$ tal que también satisface A3). Ahora bien

$$0 = 0 + 0' = 0'$$

en donde en la primera igualdad se ha utilizado que $0'$ satisface $A3)$ y en la segunda, que es 0 el que satisface $A3)$. Se concluye por tanto que $0 = 0'$.

b) Sean $x \in \mathbb{R}$ y sean $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ inversos aditivos de $x \in \mathbb{R}$; se quiere demostrar que $y_1 = y_2$. Se tiene la siguiente serie de igualdades, en las que se ha puesto debajo del símbolo de la igualdad (esto se hace frecuentemente a lo largo del texto) el axioma que justifica su validez.

$$y_1 \underset{A3)}{=} y_1 + 0 \underset{A4)}{=} y_1 + (x + y_2) \underset{A1)}{=} (y_1 + x) + y_2 \underset{A4)}{=} 0 + y_2 \underset{A3)}{=} y_2.$$

Se concluye por tanto que $y_1 = y_2$ y así solo puede existir un inverso aditivo para x.

$\square$

Gracias a la propiedad anterior *es posible utilizar* una notación para el inverso aditivo de x, que dependa solo de x, sin miedo a ambigüedades sobre a qué inverso aditivo se refiere uno, pues solo existe uno. A continuación se fija dicha notación.

Notación.

- Al inverso aditivo de x se le denotará mediante $-x$.

- (Restas) Se escribirá $x - y$ para referirse a la suma $x + (-y) =_{A2)} (-y) + x$. A esta *nueva* operación se le llama resta o diferencia.

Respecto a inversos aditivos se tienen las siguientes consecuencias importantes, parte de la aritmética usual.

Proposición 1.2.2 (Ley de los signos, versión 1) *Se tienen que:*

a) El inverso aditivo del neutro aditivo es él mismo: $-0 = 0$.

b) El inverso aditivo del inverso aditivo de un número es dicho número: $-(-x) = x \; \forall x \in \mathbb{R}$.

Demostración: Para a), $0 + (-0) = 0$ pues -0 es inverso aditivo de 0, también $0 + 0 = 0$ pues 0 es neutro aditivo. Lo anterior dice tanto -0 como 0 son ambos inversos aditivos de 0; ahora bien, por la proposición 1.2.1 se sabe que ese inverso es único y por lo tanto $-0 = 0$.

Para b) se tiene

$$
\begin{aligned}
-(-x) &\underset{A3)}{=} -(-x) + 0 \\
&\underset{A4)}{=} -(-x) + [x + (-x)] \\
&\underset{A2)}{=} [x + (-x)] + (-(-x)) \\
&\underset{A1)}{=} x + [-x + (-(-x)] \underset{A4)}{=} x + 0 \underset{A3)}{=} x.
\end{aligned}
$$

□

La siguiente consecuencia será importante al momento de resolver ecuaciones algebraicas.

Proposición 1.2.3 (Ley de la cancelación para sumas)
Si $x, y, z \in \mathbb{R}$ satisfacen $x + y = x + z$ entonces necesariamente $y = z$.

Demostración: Se tiene

$$
\begin{aligned}
y = 0 + y &\underset{A4)}{=} (-x + x) + y \\
&\underset{A1)}{=} (-x) + (x + y) \\
&\underset{\text{hipótesis}}{=\!=} (-x) + (x + z) \\
&\underset{A1)}{=} (-x + x) + z \underset{A4)}{=} 0 + z = z.
\end{aligned}
$$

□

Es importante tener a mano un ejemplo de un grupo que no sea el de los *números usuales* que uno conoce. En teoría de números y álgebra moderna el lector analizará grupos particulares, aquí solo se presentan para que el lector tenga la idea de que los axiomas vistos hasta ahora se satisfacen por otros tipos de objetos además de los números reales.

Ejemplo 1.2.1 (Los grupos C_2 y C_3) . *C_2 es un grupo que consta de dos elementos, $\{\triangle, \square\}$. La tabla para la suma es la siguiente*

$+$	$\triangle$	$\square$
$\triangle$	$\triangle$	$\square$
$\square$	$\square$	$\triangle$

El lector debe convencerse que el neutro aditivo aquí es $0 = \triangle$ y que aquí $x = -x$ para cualquier $x \in C_2$, debe verificar que se valen todos los axiomas de grupo.
El grupo C_3 consta de los elementos $\{\blacksquare, \triangle, \square\}$ y tiene la siguiente tabla para la suma

$+$	$\blacksquare$	$\triangle$	$\square$
$\blacksquare$	$\blacksquare$	$\triangle$	$\square$
$\triangle$	$\triangle$	$\square$	$\blacksquare$
$\square$	$\square$	$\blacksquare$	$\triangle$

El lector debe identificar que, por ejemplo, $\triangle = -\square$.

Ejemplo 1.2.2 *Se puede verificar (ejercicio) que $(\mathbb{N}, +)$ no es grupo (no cumple $A3$)).*

1.2.1. Ejercicios.

Ejercicio 1.2.1 *Demuestre que para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ se cumplen que:*

- $-(a + b) = -a - b$,
- $-(a - b) = -a + b$.

1.3. Axiomas de campo.

A continuación se presentan los axiomas de la multiplicación y la ley distributiva; estos axiomas juntos determinan la estructura de campo de los números reales.

$M1)$ Ley asociativa: $(xy)z = x(yz)\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

$M2)$ Ley conmutativa: $xy = yx\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

$M3)$ Existencia de un neutro multiplicativo: Existe un elemento $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, tal que: $x \cdot 1 = x\ \forall x \in \mathbb{R}$.

$M4)$ Existencia de un inverso multiplicativo (recíprocos): Para cada $x \neq 0$, existe $y \in \mathbb{R}$ con $xy = 1$.

LD) Ley distributiva: $x(y + z) = xy + xz\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

Debe observarse que a pesar de que los primeros cuatro axiomas son muy similares a los (también cuatro) axiomas de grupo, hay diferencias sutiles; por ejemplo el axioma $M3)$ exige que $1 \neq 0$, esto hace que $\mathbb{R}$ conste de al menos dos números distintos (más adelante se verá que de hecho hay una infinidad de números reales). A diferencia del axioma $A4)$, para el axioma $M4)$ solo se tiene asegurado la existencia de inversos multiplicativos para elementos $x \neq 0$.
La ley distributiva es un axioma que relaciona las dos operaciones de $\mathbb{R}$, la de la suma con la de la multiplicación.

Consecuencias de los axiomas de campo.

Es claro que a consecuencia de $M2)$ podríamos escribir en $M3)$ que $1x = x1 = x$ y en $M4)$ que un inverso multiplicativo y de

$x \neq 0$ cumple $xy = yx = 1$. También la ley distributiva se puede escribir como

$$(x + y)z = xz + yz \; \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

A continuación se presentan unas consecuencias de este bloque de axiomas. El lector debe ver la analogía tanto en el enunciado como en la demostración de algunas de estas con las de los axiomas de grupos.

Proposición 1.3.1 ***(Unicidad de neutro e inversos multiplicativos)*** *Respecto al neutro y los inversos multiplicativos se valen:*

a) El neutro multiplicativo, $1 \in \mathbb{R}$ *está completamente determinado por la propiedad M3) que lo define.*

b) El inverso multiplicativo de $x \neq 0$*, está determinado de manera única por el axioma* $M4)$ *que lo define.*

Demostración: Dada la analogía con la demostración de la proposición 1.2.1, la prueba aquí se escribe de modo compacto.

a) Sean $1, 1' \in \mathbb{R}$, neutros multiplicativos en $\mathbb{R}$, así

$$1 \underset{M3)}{=} 11' \underset{M3)}{=} 1'.$$

b) Sean y_1, y_2 inversos multiplicativos de $x \neq 0$. Tenemos

$$y_1 \underset{M3)}{=} y_1 \cdot 1 \underset{\text{hipó.}}{=} y_1(xy_2) \underset{M1)}{=} (y_1x)y_2 \underset{\text{hipó.}}{=} 1 \cdot y_2 \underset{M3)}{=} y_2.$$

□

Esta propiedad permite fijar una notación al inverso multiplicativo de $x \neq 0$ que dependa solo de de x.

Notación.

- Al inverso multiplicativo de $x \neq 0$ se le denotará por x^{-1}.
- (Cocientes, división) Si $y \neq 0$ se denota por x/y o por $\frac{x}{y}$ al número $x(y^{-1})$.

Los cocientes x/y son también llamados fracciones, más adelante se trabajarán a detalle las propiedades de fracciones.

Proposición 1.3.2 *Para cada $x \in \mathbb{R}$ se cumplen*

a) $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$.

b) *El inverso aditivo de x es la multiplicación de x por el inverso aditivo del neutro multiplicativo, es decir* $-x = (-1)x = x(-1)$.

Demostración: Para $a)$ observe primero que de $A3)$ tenemos que $0 + 0 = 0$, así que, usando esto, se tiene

$$x \cdot 0 = x(0 + 0) \underset{LD)}{=} x \cdot 0 + x \cdot 0. \tag{1.1}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} x \cdot 0 &\underset{A3)}{=} x \cdot 0 + 0 \\ &\underset{A4)}{=} x \cdot 0 + [x \cdot 0 + (-x \cdot 0)] \\ &\underset{A1)}{=} [x \cdot 0 + x \cdot 0] + (-x \cdot 0) \underset{(1.1)}{=} x \cdot 0 + (-x \cdot 0) \underset{A4)}{=} 0. \end{aligned}$$

Para $b)$ basta mostrar que $x + (-1)x = 0$ por la unicidad de inversos aditivos (proposición 1.2.1). Ahora bien,

$$x + (-1)x \underset{M3)}{=} 1 \cdot x + (-1)x \underset{LD)}{=} (1 + (-1))x \underset{A4)}{=} 0 \cdot x \underset{a)}{=} 0.$$

$\square$

Proposición 1.3.3 *Para* $x \neq 0$ *se tiene que* x^{-1} *es también distinto de* 0 *y además* $(x^{-1})^{-1} = x$.

Demostración: Si se diera $x^{-1} = 0$ entonces tendríamos que

$$1 \underset{M4)}{=} xx^{-1} \underset{\text{hipó.}}{=} x0 = 0$$

donde la última igualdad es por la proposición 1.3.2; esto dice que $1 = 0$, lo cual está en contradicción con $M3)$. Esto termina la argumentación de que $x^{-1} \neq 0$. La segunda parte es análoga al caso aditivo: Observe que usando $M4)$, para x^{-1} y x respectivamente, se tienen $(x^{-1})(x^{-1})^{-1} = 1$ y $(x^{-1})x = 1$, lo cual muestra que tanto $(x^{-1})^{-1}$ como x son inversos multiplicativos de x^{-1}, por la unicidad de inversos multiplicativos (proposición 1.3.1) se tiene entonces que $(x^{-1})^{-1} = x$. $\square$

Proposición 1.3.4 (Ley de los signos) *Para cualesquiera* $x, y \in \mathbb{R}$ *se vale* $(-x)(-y) = xy$.

Demostración: Se tiene que

$$\begin{aligned}(-x)(-y) &\underset{\text{proposición 1.3.2}}{=\!=\!=} (-x)[(-1)y] \\ &\underset{M1)}{=} [(-x)(-1)]y \underset{\text{proposición 1.3.2}}{=\!=\!=} [-(-x)]y = xy,\end{aligned}$$

en donde en la última igualdad se ha usado la primera versión de la regla de los signos (proposición 1.2.2). $\square$

También en este caso se tiene una ley de cancelación.

Proposición 1.3.5 (Ley de cancelación para productos) *Si* $x \neq 0$ *y se vale* $xy = xz$ *entonces necesariamente* $y = z$.

La demostración del enunciado anterior es análoga a la de la ley de la cancelación para la suma, por lo que se dejará como ejercicio al lector.
Con ambas leyes de cancelación es posible resolver ecuaciones lineales, como veremos en el siguiente teorema.

Teorema 1.3.1 ***(Existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones lineales)*** *Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. La ecuación algebraica $ax + b = c$ tiene una única solución dada por $x_0 = \frac{c-b}{a}$.*

Demostración: *Unicidad.* Suponga que x_1 y x_2 son dos soluciones para la ecuación dada. Se tiene entonces que $ax_1 + b = c = ax_2 + b$, y de $ax_1 + b = ax_2 + b$ y la ley de la cancelación aditiva se sigue que $ax_1 = ax_2$, pero entonces aplicando la ley de cancelación para productos, ya que $a \neq 0$, se concluye que $x_1 = x_2$.
Existencia. Esta parte es fácil, pues el teorema dice quién debe ser la solución, a saber $x_0 = (c-b)/a = a^{-1}(c-b)$. Se debe por tanto realizar las operaciones de $ax_0 + b$ y verificar que el resultado es c, en efecto:

$$
\begin{aligned}
ax_0 + b = a[a^{-1}(c-b)] + b &\underset{M1)}{=} [aa^{-1}](c-b) + b \\
&\underset{M4)}{=} 1(c-b) + b \underset{M3)}{=} (c-b) + b \underset{A1)}{=} c + (-b+b) \underset{A4)}{=} c + 0 \underset{A3)}{=} c.
\end{aligned}
$$

□

El siguiente teorema es importante pues dice en particular que $\mathbb{R}$ es libre de divisores de cero.

Teorema 1.3.2 *Para $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene: $xy = 0$ si y solo si $x = 0$ o $y = 0$.*

Demostración: [$\Rightarrow$] Suponga que $xy = 0$. Se quiere argumentar que $x = 0$ ó $y = 0$. Si $x = 0$ no hay nada que hacer, así que se puede suponer que $x \neq 0$ y demostrar entonces que $y = 0$. Ahora bien, se tiene que $xy = x0$ pues ambos lados son iguales a 0. Como $x \neq 0$ se puede aplicar la ley de la cancelación para productos y concluir de $xy = x0$ que $y = 0$.
[$\Leftarrow$] Si $x = 0$ o $y = 0$ entonces claramente se tiene $xy = 0$ por la proposición 1.3.2.

$\square$

Proposición 1.3.6 *Si $x, y \in \mathbb{R}$ son ambos distintos de cero entoces $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$.*

En el resultado anterior tiene sentido escribir $(xy)^{-1}$ pues $xy \neq 0$ según la proposición previa. La prueba es consecuencia de la unicidad de los inversos multiplicaivos y se deja como ejercicio al lector.

Antes de continuar con las consecuencias de los axiomas, se quiere enfatizar que se tienen dos elementos distinguidos en $\mathbb{R}$, el 0 y el 1. Este es buen momento para introducir los siguientes conjuntos importantes, el de los naturales $\mathbb{N}$ y el de los enteros $\mathbb{Z}$.

Notación. Se escribe 2 en lugar de $1 + 1$, de modo similar $3 := 2+1 = (1+1)+1$, $4 := 3+1$, etc. y el conjunto de estos números, llamados números naturales, se denota por $\mathbb{N}$,

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \cdots\}.$$

El conjunto que consta del 0, de los números naturales y de sus inversos aditivos, se llama el conjunto de números enteros y se denota por $\mathbb{Z}$, esto es $\mathbb{Z} := \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \cdots\}$.

En este punto es conveniente que el lector se convenza de que puede argumentar formalmente algunos de los resultados que conocía desde su educación básica, por ejemplo, puede convencerse de que efectivamente (con las definiciones y convenciones tomadas aquí) es cierto que $2 \cdot 2 = 4$. En efecto

$$2 \cdot 2 \underset{\text{def.}}{=} 2(1+1) \underset{LD)}{=} 2+2 \underset{\text{def.}}{=} 2+(1+1) \underset{A1)}{=} (2+1)+1 \underset{\text{def}}{=} 3+1 \underset{\text{def.}}{=} 4.$$

Se recomienda en este punto resolver el problema 1.3.1. Después de esto el lector puede utilizar este tipo de aritmética sin tener que dar justificaciones.

1.3.1. Pontencias enteras.

Se han visto hasta ahora los dos primeros bloques de axiomas de $\mathbb{R}$, los aditivos (de grupo) y los multiplicativos (de campo). Estos son los más importantes en cuánto a aritmética se refiere. Las potencias son parte importante de la aritmética de un campo. A continuación se empieza tratando el caso natural.

Definición 1.3.1 *Para $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ se define la pontencia n-ésima de x, denotada x^n, de modo recursivo como sigue: $x^1 := x$ y si ya se tiene definido x^n entonces*

$$x^{n+1} := x(x^n).$$

Un resultado importante sobre potencias son las siguientes, llamadas *leyes de exponentes.*

Proposición 1.3.7 *Para $x \in \mathbb{R}$ y cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ se valen*

- $x^n x^m = x^{n+m}$.
- $(x^n)^m = x^{nm}$.
- $x^n y^n = (xy)^n$ *para cualquier* $y \in \mathbb{R}$.

Demostración: Se probará la primera igualdad usando inducción matemática. Fijando $n \in \mathbb{N}$, la inducción será sobre m; se probará entonces que $x^n x^m = x^{n+m}$.
B.I. $[\boldsymbol{m = 1}]$. Se tiene

$$x^n x^m = x^n x^1 \underset{\text{def.}}{=} x^{n+1} = x^{n+m}.$$

P.I. $[\boldsymbol{m \Rightarrow m+1}]$. Tenemos

$$\begin{aligned} x^n x^{m+1} &\underset{\text{def.}}{=} x^n(x^m x^1) \underset{M1)}{=} (x^n x^m)x^1 \\ &\underset{H.I.}{=} x^{n+m}x^1 \underset{\text{def.}}{=} x^{(n+m)+1} \underset{A1)}{=} x^{n+(m+1)}. \end{aligned}$$

Esto termina la prueba de la primera igualdad. La demostración de las otras es similar, la segunda requiere de la primera (que se acaba de demostrar). Se dejan ambas pruebas al lector. $\square$

Proposición 1.3.8 *Sea* $x \neq 0$. *Para* $n, m \in \mathbb{N}$ *se tiene*

$$\frac{x^n}{x^m} = \begin{cases} x^{n-m} & \textit{si } n > m, \\ 1 & \textit{si } n = m, \\ \frac{1}{x^{m-n}} & \textit{si } n < m. \end{cases}$$

Demostración: El caso $n = m$ es trivial y los otros dos casos son análogos, se probará por tanto solo el caso $n < m$. Suponga entonces que $n < m$ y sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + k$. Se tiene entonces

$$\frac{x^n}{x^m} \underset{\text{def. frac}}{=} (x^n)(x^m)^{-1} \underset{\text{Prop.1.3.7}}{=} (x^n)[x^n x^k]^{-1}$$

$$
\begin{aligned}
&\underset{\text{Prop.1.3.6}}{=} (x^n)[(x^n)^{-1}(x^k)^{-1}] \\
&\underset{M1)}{=} [(x^n)(x^n)^{-1}](x^k)^{-1} \underset{M3)}{=} 1(x^k)^{-1} \underset{\text{def. frac.}}{=} \frac{1}{x^k} = \frac{1}{x^{m-n}}.
\end{aligned}
$$

□

La proposición siguiente permite extender la definición de potencias a exponentes negativos.

Proposición 1.3.9 *Sea* $x \neq 0$*. Para* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $x^n \neq 0$ *y además que* $(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n$.

En la proposición anterior, la prueba puede hacerse por inducción en ambos casos, dichas pruebas se dejan al lector. La prueba de la primera afirmación usa la definición recursiva de potencias y la proposición 1.3.2, la prueba de la igualdad $(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n$ usa la proposición 1.3.6.

Definición 1.3.2 *Sea* $x \neq 0$*. Para* $n \in \mathbb{N}$ *se denotará por* x^{-n} *al valor común* $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1}$*. También adoptará la convención de que* $x^0 := 1$.

Debe hacerse énfasis en que sólo tiene sentido x^0 al igual que x^{-n}, $n \in \mathbb{N}$, para cuando $x \neq 0$. Dado que $x^{-n} = (x^n)^{-1}$ se tiene en particular que

$$x^n x^{-n} = 1 = x^0 = x^{n+(-n)},$$

lo cual muestra que se vale una de la leyes de los exponentes en este caso, aún cuando $-n$ no es natural. Con esta terminología, la proposición 1.3.8 se puede escribir, en todos los casos, simplemente como $x^n/x^m = x^{n-m}$. De hecho las leyes de los exponentes se extienden de modo compatible a los casos negativos y cero, esto se enuncia a continuación y la prueba (que tiene muchos casos) se deja como práctica al lector (haga algunos casos).

Proposición 1.3.10 (Leyes de exponentes) *Sean* $x, y \in \mathbb{R}$ *y sean* $n, m \in \mathbb{Z}$. *Se valen las siguientes afirmaciones.*

a) $x^m x^n = x^{n+m}$. *d)* $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$.

b) $(x^m)^n = x^{mn}$. *e)* $x^{-n} = 1/x^n$.

c) $x^n y^n = (xy)^n$. *f)* $x^n = 1/x^{-n}$.

Debe tomarse en cuenta que $x \neq 0$ *o* $y \neq 0$ *si alguno de los exponentes involucrados es* 0 *o negativo, o bien aparece como parte de un denominador.*

En capítulos posteriores se abordará el caso de exponentes racionales y se verá que de hecho pueden definirse exponentes reales en general.

Antes de pasar al siguiente bloque de axiomas, será bueno hablar un poco de fracciones.

1.3.2. Sobre fracciones.

Para $y \neq 0$ se ha definido x/y como el producto $x(y^{-1})$. Es por esto que se tiene directamente que $y/y = y(y^{-1}) = 1$ y $0/y = 0(y^{-1}) = 0$.

Sumar fracciones con el mismo denominador es fácil como lo muestra el siguiente resultado.

Proposición 1.3.11 *Sean* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *con* $y \neq 0$. *Se tiene que*

$$\frac{x}{y} + \frac{z}{y} = \frac{x+z}{y}.$$

Demostración: Se tiene que

$$\frac{x}{y} + \frac{z}{y} = x(y^{-1}) + z(y^{-1}) \underset{LD)}{=} [x+z](y^{-1}) = \frac{x+z}{y}.$$

□

Como el lector podrá darse cuenta, de la demostración de la proposición anterior y de los comentarios previos a ella, las propiedades de fracciones pueden verificarse de modo muy sencillo. Se deja por lo tanto la demostración de la siguiente proposición como un ejercicio, en dicha proposición se resume lo anterior y algunas de las principales propiedades de fracciones.

Proposición 1.3.12 ***(Propiedades aritméticas de fracciones)*** *Sean $x, y, z, t, u \in \mathbb{R}$ en donde $y, z \neq 0$. Se vale cada una de las siguientes afirmaciones.*

a) $0/y = 0$ *y también* $y/y = 1$.

b) $xz/yz = x/y$.

c) $x/(-y) = -(x/y) = (-x)/y$.

d) $x/y \pm t/y = (x \pm t)/y$.

e) $x/y \pm t/u = (xu \pm yt)/(yu)$, *si* $u \neq 0$.

f) $(x/y)(u/z) = xu/yz$.

g) *Si* $x \neq 0$ *entonces* $(x/y)^{-1} = y/x$.

h) $(x/y)/(u/z) = xz/yu$ *(ley del sándwich).*

Para concluir esta sección, se quiere mencionar que las fracciones x/y para el caso en que tanto x como y son enteros (y recuerde siempre, $y \neq 0$) son llamadas por la gente comúnmente *quebrados*; los matemáticos prefieren llamar a dichas fracciones números racionales.

Notación.

El conjunto de números racionales se denota por $\mathbb{Q}$, es decir

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}.$$

1.3.3. Ejercicios.

Ejercicio 1.3.1 *Verifique las siguientes operaciones:*

- $3(2) = 6$ *y* $2(5) = 10$.
- $(-3)(3) = -9$ *y* $(2)(-4) = -8$.
- $2x = x + x$ *para cualquier* $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.3.2 *El objetivo de este ejercicio es ver la utilidad de pedir en el axioma* $M3)$ *que* $1 \neq 0$. *Muestre que si* $1 = 0$ *entonces el conjunto* $\mathbb{R}$ *constaría de un solo elemento, de modo preciso muestre que se tendría que* $x = 1$ *para cualquier* $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.3.3 *Demuestre la proposición 1.3.6.*

Ejercicio 1.3.4 *Complete los detalles de la prueba de la proposición 1.3.9 (comentarios debajo del enunciado de la proposición).*

Ejercicio 1.3.5 *Elija un par de casos, de la proposición 1.3.10 y demuéstrelos; algunos se pueden demostrar con inducción y otros como consecuencia de los anteriores.*

Ejercicio 1.3.6 *Muestre que si* $x/y = 0$ *entonces* $x = 0$.

Ejercicio 1.3.7 *Muestre que los grupos* C_2 *y* C_3 *son campos cuando se agrega la correspondiente multiplicación dada abajo.*

$\cdot$	$\triangle$	$\square$
$\triangle$	$\triangle$	$\triangle$
$\square$	$\triangle$	$\square$

$\cdot$	$\blacksquare$	$\triangle$	$\square$
$\blacksquare$	$\blacksquare$	$\blacksquare$	$\blacksquare$
$\triangle$	$\blacksquare$	$\triangle$	$\square$
$\square$	$\blacksquare$	$\square$	$\triangle$

Se recomienda que el lector observe que en C_2 se cumple $1 = \square$ y que en C_3 se tiene $1 = \triangle$, y que en C_2 se tiene $2 = 0$ y en C_3 que $2 + 3 = 1$ (no olvide que $2 := 1 + 1$).
Estos campos son denotados por $\mathbb{F}_2$ y $\mathbb{F}_3$ respectivamente.

Ejercicio 1.3.8 *Demuestre que si n, m son números naturales entonces $n + m$ y nm son también números naturales. ¿Es $\mathbb{N}$ un grupo? ¿Es $\mathbb{Z}$ un grupo, un campo?*

Ejercicio 1.3.9 *Demuestre que para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ se valen cada una de las siguientes:*

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Recuerde utilizar la axiomática de $\mathbb{R}$ para justificar sus pasos y no dejar ningún paso sin argumentar.

Ejercicio 1.3.10 *Demuestre que* $(1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = 1 - x^{n+1}$.

Ejercicio 1.3.11 *Generalice el ejercicio anterior mostrando que*

$$a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right).$$

Ejercicio 1.3.12 *Utilice el teorema sobre propiedades aritméticas de fracciones para conlcuir que la suma y el producto de números racionales es nuevamente racional. Concluya que $\mathbb{Q}$ es un campo.*

Ejercicio 1.3.13 *Demuestre que las fracciones a/b y x/y representan al mismo número real si y solo si $ay = bx$.*

Ejercicio 1.3.14 *Sean $r \in \mathbb{Q}$ y $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Demuestre cada una de las siguientes afirmaciones:*

- $x + r$ *es irracional.*
- x^{-1} *es irracional y si $r \neq 0$ entonces rx es también irracional.*

Ejercicio 1.3.15 *Sea $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y sean $c, d \in \mathbb{Q}$. Muestre que si c y d no son cero al mismo tiempo (i.e. al menos uno de ellos no es cero) entonces $cx + d \neq 0$.*

Ejercicio 1.3.16 *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ y sea $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Suponga que $ab - cd \neq 0$. Muestre cada una de las siguientes afirmaciones.*

a) $cx + d \neq 0$ *y así* $y := (ax + b)/(cx + d)$ *está bien definido.*

b) $y \neq 0$ *y de hecho* $cy - a \neq 0$.

c) $x = (-dy + b)/(cy - a)$ *y por tanto* $y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Sugerencia: *Para a) y la primera parte de b) usar el ejercicio 1.3.15.*

1.4. Axiomas de orden

El conjunto de números reales es un campo como se ha visto, pero es un campo ordenado. A continuación se precisa qué se entiende con esto.

Se está suponiendo que en $\mathbb{R}$ hay ciertos elementos *marcados* (o distinguidos) llamados **positivos**. El conjunto de números positivos se denotará por $\mathbb{R}_+$ y se supondrá que sus elementos satisfacen los siguientes cuatro axiomas, llamados axiomas de orden.

O1) Tricotomía: Para todo número $x \in \mathbb{R}$ se cumple una y solamente una de las siguientes: $x \in \mathbb{R}_+$, $x = 0$, $-x \in \mathbb{R}_+$.

O2) Cerradura de positivos bajo la suma: Si $x, y \in \mathbb{R}_+$ entonces $x + y \in \mathbb{R}_+$.

O3) Cerradura de positivos bajo el producto: $x, y \in \mathbb{R}_+$ entonces $xy \in \mathbb{R}_+$.

(PBO) Principio del buen orden: Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ posee un elemento mínimo.
El último de estos axiomas requiere que se aclare el significado de *mínimo*. Sin embargo, esto se deja para después y se comienza ahora analizando consecuencias que se desprenden de los primeros tres axiomas.

1.4.1. Consecuencias de los axiomas O1) a O3).

Para hacer más intuitivo el lenguaje en esta parte, se escribirá frecuentemente $x > 0$ en lugar de $x \in \mathbb{R}_+$, el lector debe estar atento y no olvidar que el símbolo $>$ es solo otra manera de representar la pertenencia al conjunto $\mathbb{R}_+$.

Notación.
Para $x, y \in \mathbb{R}$ se escribirá $x > y$ en caso de que $x - y > 0$ (i.e. que $x - y \in \mathbb{R}_+$).

Observe que si $x \in \mathbb{R}_+$ y $y = 0$ entonces esta notación es congruente con $x > 0$ del párrafo previo. A continuación se presenta una proposición que extiende al axioma O1) de tricotomía.

Proposición 1.4.1 (Tricotomía) *Para $x, y \in \mathbb{R}$ se vale exactamente una de las siguientes: $x > y$, $x = y$ o $y > x$.*

recta de tal modo que se supere al segmento mayor.
Demostración: Considere el número $d := x - y$. Usando O1) se sabe que se vale exactamente una de entre $d > 0$, $d = 0$ ó $-d > 0$. El caso $d > 0$ significa precisamente que $x > y$ (definición del símbolo $>$); el caso $d = 0$ se traduce (al sumar a ambos lados de la igualdad y) a $y = x$; por último, el caso $-d > 0$ significa que $-(x - y) > 0$. Ahora bien, en este caso $y - x = -(x - y) = -d > 0$, es decir $y > x$ (observe que se ha usado el ejercicio 1.2.1). $\square$

Es costumbre usar varios símbolos de orden, en la siguiente definición se enlistan algunos de estos.

Definición 1.4.1 *Sean $x, y \in \mathbb{R}$.*

- *$x < y$ significa $y > x$ (i.e. $y - x \in \mathbb{R}_+$).*
- *$x \leq y$ significa que $x > y$ es falso.*
- *$x \geq y$ significa $y \leq x$.*

Estas relaciones son llamadas desigualdades.

Se ha optado por escribir el segundo punto como una negación para enfatizar que de la tricotomía es únicamente un caso el que queda excluido, es decir, si $x \leq y$ entonces puede darse alguno de $x = y$ o $y > x$.

La propiedad de tricotomía permite que sea posible definir máximos y mínimos.

Definición 1.4.2 *Sean $x, y \in \mathbb{R}$ números dados. Se definen el máximo y el mínimo de x e y respectivamente mediante*

$$\text{máx}\{x,y\} := \begin{cases} x \textit{ si } x \geq y, \\ y \textit{ en otro caso;} \end{cases} \qquad \text{mín}\{x,y\} := \begin{cases} x \textit{ si } x \leq y, \\ y \textit{ en otro caso.} \end{cases}$$

De modo más general, para una cantidad finita de números reales $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ se define su máximo y su mínimo de modo recursivo con lo anterior y

$$\text{máx}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} := \text{máx}\left\{x_1, \text{máx}\{x_2, \cdots, x_n\}\right\},$$
$$\text{mín}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} := \text{mín}\left\{x_1, \text{mín}\{x_2, \cdots, x_n\}\right\}$$

Hasta ahora se han definido mínimos para conjuntos finitos de números reales. Para conjuntos infinitos (que es el caso general que se necesita en el PBO, por ejemplo) hay que trabajar un poco más, por eso se deja este tema por ahora y se continúa con el análisis de las consecuencias de los primeros axiomas de orden.

Proposición 1.4.2 *Se valen las siguientes.*

a) Transitividad: Si $x < y$, $y < z$ entonces $x < z$.

b) Invarianza bajo traslaciones: Si $x < y$ *entonces* $a + x < a + y$ *para cualquier* $a \in \mathbb{R}$.

c) Propiedad de reflexión: Si $x < y$ *entonces* $-x > -y$.

Las propiedades análogas se valen si se sustituyen todos los símbolos $<$ *de un enunciado anterior por alguno de* $\leq$, $>$ *o* $\geq$*; en el último caso debe cambiarse también* $>$ *por el correspondiente símbolo* reflejado $<$.

Demostración: a) La hipótesis significa que $y - x > 0$ y que $z - y > 0$. Usando el axioma O2) se tiene que $(y-x)+(z-y) > 0$; ahora bien

$$\begin{aligned} 0 < (-x+y) + (-y+z) &\underset{A1)}{=} -x + [y + (-y+z)] \\ &\underset{A1)}{=} -x + [(y-y)+z] \\ &\underset{A4)}{=} -x + [0+z] \underset{A3)}{=} -x + z\,, \end{aligned}$$

como $0 < z - x$ se sigue $x < z$.
b) Se tiene que $y - x > 0$. Ahora bien

$$\begin{aligned} (a+y) - (a+x) &\underset{A2)\text{ y }A1)}{=} y + [a - (a+x)] \underset{\text{Ejer. 1.2.1}}{=\!=\!=} y + [a + (-a-x)] \\ &\underset{A1)}{=} y + [(a-a)-x] = y + [0-x] = y - x > 0. \end{aligned}$$

Se ha mostrado que $(a+y)-(a+x) > 0$, es decir que $a+x < a+y$.
c) Trivial: $(-x) - (-y) = -x + y = y - x > 0$. La primera igualdad ha usado la proposición 1.2.2. $\square$

Gracias a la invarianza bajo traslaciones es posible sumar desigualdades del mismo tipo miembro a miembro como lo muestra el siguiente colorario.

Corolario 1.4.1 *Si $a < b$ y $x < y$ entonces $a + x < b + y$.*
Enunciados análogos son válidos si se cambia todos los $<$ por alguno de $\leq$, $\geq$ o $>$.

Demostración: Usando la invarianza bajo traslaciones (proposición 1.4.2) en $x < y$, trasladando con a, se obtiene que $a + x < a + y$. Aplicando nuevamente la invariaza bajo traslaciones, pero ahora a la desigualdad $a < b$ y trasladando con y, se tiene que $a + y < b + y$. Valen entonces ambas desigualdades $a + x < a + y$ y $a + y < b + y$, así que por la transitividad, $a)$ de la proposición 1.4.2, se sigue que $x + a < b + y$. □

Los resultados anteriores muestran que la suma se comporta bien con las desigualdades. Para el caso de productos hay que ser más cuidadoso pues no todas las desigualdes se mantienen.

Proposición 1.4.3 *Se tienen los siguientes enunciados.*

a) *Sean $x < y$ y $a \neq 0$. Se tiene entonces que*

- $ax < ay$ *si* $a > 0$, *pero*
- $ax > ay$ *si* $a < 0$.

b) *Si $0 \leq a < b$ y $0 \leq x < y$ entonces $ax < by$. Consecuentemente para $0 \leq x < y$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x^n < y^n$.*

Demostración: $a)$ Ambos casos son una reformulación de la cerradurada de los positivos bajo el producto, se probará solo el caso $a < 0$ por lo tanto. $x < y$ significa que $y - x > 0$ y $a < 0$ implica de la propiedad de reflexión (proposición 1.4.2) que $-a > 0$. Ahora bien, aplicando el axioma $O3)$ a $y - x$ y a $-a$ se tiene que

$$0 < -a(y - x) = -ay + (-a)(-x) \underset{\text{Prop. 1.3.4}}{=} -ay + ax$$

es decir, $ax > ay$.

$b)$ La segunda parte de esta afirmación es simplemente inducción con base inductiva en la primera afirmación. Para la primera parte, si en alguno de los símbolos $\leq$ involucrados se da la igualdad entonces, por la proposición 1.3.2, se tiene $ax = 0$; en este caso $by > 0 = az$, (por el axioma O2)) y habríamos acabado. Supongamos por tanto que $0 < a < b$ y $0 < x < y$. Usando la parte $a)$ dos veces, una vez con $x < y$, $a > 0$ y otra con $a < b$ y $y > 0$, se tiene que $ax < ay$, $ay < by$, con lo cual, por transitividad, se tiene $ax < by$.

$\square$

Debe observarse que hasta ahora lo único que se sabe de $\mathbb{R}_+$ son sus axiomas, *no* se ha exhibido un elemento explícito de este conjunto. El siguiente resultado da ejemplos de muchos elementos de $\mathbb{R}_+$.

Teorema 1.4.1 *Para $x \neq 0$ se tiene que $x^2 > 0$; consecuentemente* $1 > 0$.

Demostración: La segunda afirmación es trivial del hecho que $1 \neq 0$ (por el axioma M3)) y que claramente de M4) se tiene $1 = 1^2$. Mostremos entonces la primera parte. Sea $x \neq 0$. Por el axioma de tricotomía O1) se tiene que se da alguno de $x > 0$ o $-x > 0$. Si $x > 0$ entonces por $O3$) (cerradura de los positivos bajo el producto) se tiene que $x^2 = x \cdot x > 0$. Si $-x > 0$ entonces por la propiedad de reflexión de desigualdades se tiene $x < 0$ así que, usando la proposición 1.4.3, se tiene que $x \cdot x > x \cdot 0 = 0$, esto es $x^2 > 0$. Esto concluye la demostración.

$\square$

Con este resultado se puede probar lo siguiente.

Proposición 1.4.4 *Sean $x, y \in \mathbb{R}$ distintos de 0. Se tienen:*

a) $x > 0$ ***si y solo si*** $x^{-1} > 0$.

b) $0 < x < y$ ***si y solo si*** $x^{-1} > y^{-1} > 0$.

Demostración: $a)$ Dado que $(x^{-1})^{-1} = x$ bastará probar únicamente una dirección. Suponga entonces que $x > 0$. Por el teorema 1.4.1 se tiene que $x^{-2} = (x^{-1})^2 > 0$, usando ahora la cerradura de los positivos bajo el productose tiene que $x^{-1} = x \cdot x^{-2} > 0$.
$b)$ Al igual que antes, basta probar solo una dirección. Sean x, y tales que $0 < x < y$. Se tiene que $xy > 0$, por el axioma $O3$), así usando $a)$ se tiene que $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} > 0$, usando ahora la proposición 1.4.3 se obtiene $x(x^{-1}y^{-1}) < y(x^{-1}y^{-1})$, la cual, después de realizar las operaciones aritméticas necesarias, se reduce a $y^{-1} < x^{-1}$.

$\square$

Los dos resultados anteriores, son consecuencias muy importantes de los primeros tres axiomas de orden, de hecho con estos axiomas se puede en efecto, *ordenar* a los números reales y ver que estos se pueden disponer en una línea recta, que es como se les acostumbra representar. Primero que nada, el teorema 1.4.1 dice que $1 > 0$. Se puede trasladar esta desigualdad con 1 y así obtener que $1 < 2$, nuevamente al trasladar con 1 se obtiene que $2 < 3$; continuando este proceso se obtiene

$$0 < 1 < 2 < 3 < \cdots < n < n + 1 < n + 2 < \cdots$$

Ahora bien, usando la propiedad de reflexión (proposición 1.4.2) a las desigualdades anteriores se tiene que

$$0 > -1 > -2 > -3 > \cdots > -n > -n - 1 > -n - 2 > \cdots$$

Esto muestra cómo están ordenados los enteros entre sí. En resumen, se tiene

$$\cdots < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < \cdots$$

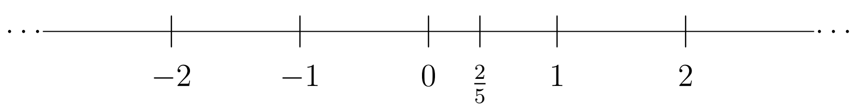
¿Cómo se encuentran posicionados los racionales? Por ejemplo, ¿dónde está $1/2$? Debe observarse que $0 < 1 < 2$ así que, utlizando la proposición 1.4.4, se obtiene $0 < 1/2 < 1/1 = 1$, por lo tanto la respuesta es *entre el* 0 *y el* 1. Similarmente, ¿dónde está el $1/3$? Pues $0 < 2 < 3$ así que por proposición 1.4.4 nuevamente se tiene que $0 < 1/3 < 1/2$. Agregando que $1/2 < 1$ y usando la propiedad de reflexión en las consideraciones anteriores, se tiene que

$$\cdots < -3 < -2 < -1 < -\frac{1}{2} < -\frac{1}{3} < 0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1 < 2 < 3 < \cdots$$

En este punto se recomienda al lector resolver el problema 1.4.1. También se tiene el siguiente resultado, el cual es una consecuencia de la proposicón 1.4.3 y se deja como ejercicio al lector.

Proposición 1.4.5 *Sean* $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ *con* $b, y \in \mathbb{R}_+$. *Se tiene que* $a/b < x/y$ *si y solo si* $ay < bx$.

En la proposición anterior, la condición $b > 0$, $y > 0$ no representa una restricción, pues siempre se puede lograr esto según $c)$ de la proposición 1.3.12. Este resultado le ayudará al lector a situar los racionales en el lugar correcto (en donde sabe que deberían estar posicionados).
Se ha dibujado a continuación la recta real, situando $2/5$ en ella, el lector debe verificar que esta fracción está bien situada.



El hecho que la recta real se dibuje normalmente de modo horizontal o vertical, con los positivos a la derecha o arriba respectivamente, es pura convención y comodidad, realmente se podría dibujar la recta en forma diagonal, situar al 0 y elegir *un lado* para los positivos y el otro para los negativos.

1.4.2. Valor absoulto.

Una de las ventajas de los axiomas de orden es que permiten definir la función de valor absoluto. Esta función es de suma importancia en el cálculo diferencial pues será la manera de medir *cercanía* entre números.

Definición 1.4.3 *Para* $x \in \mathbb{R}$ *se define el* valor absoluto de x *mediante* $|x| := \text{máx}\{x, -x\}$.

De la definición de máximo para dos números se desprende que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Se tienen de hecho las siguientes observaciones, cuyas pruebas son inmediatas de la definición.

- $|0| = 0$ y $|1| = 1$.
- $|x| = |-x|$ pues $-(-x) = x$.
- $|x| \geq \pm x$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

Proposición 1.4.6 *El valor absoluto de* $\mathbb{R}$ *posee las siguientes propiedades:*

a) *Para toda* $x \in \mathbb{R}$ *se tiene* $|x| \geq 0$ *y también:* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

b) *Multiplicatividad:* $|xy| = |x||y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

c) *Desigualdad del triángulo:* $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Demostración:

a) Por el axioma de tricotomía solo existen tres posibles casos: $x = 0$, $x > 0$ y $-x > 0$. Si $x \geq 0$, $|x| = x$, si $-x > 0$ entonces $|x| = -x > 0$ y por último, si $x = 0$ entonces $|x| = 0$. Se puede ver que de entre estos casos el único en que $|x| = 0$ es cuando $x = 0$, en otro caso se tiene $|x| > 0$.

b) Primero se tratará el siguiente caso especial: $x \geq 0$, $y \geq 0$. En este caso $|x| = x$, $|y| = y$ y $xy \geq 0$ por la cerradura de los positivos bajo el producto (axioma O3)), así $|x||y| = xy = |xy|$ y la igualdad es cierta en este caso. Ahora se verá el caso general; para esto se escribe $x = \pm x_0$, $y = \pm y_0$ con $x_0 \geq 0$ y $y_0 \geq 0$. Se tiene entonces

$$|xy| = |(\pm x_0)(\pm y_0)| = | \pm x_0 y_0| = |x_0 y_0| = |x_0||y_0| = |x||y|.$$

c) Se sabe por observaciones previas que $x \leq |x|$ y $y \leq |y|$; por el corolario 1.4.1 se sigue que $x + y \leq |x| + |y|$. También $-x \leq |x|$, $-y \leq |y|$ con lo cual, nuevamente usando el corolario 1.4.1 se tiene que $-(x + y) = -x - y \leq |x| + |y|$. Ahora bien, lo anterior dice que $|x| + |y|$ es mayor igual tanto a $x + y$ como a $-(x + y)$ y como $|x + y| = \text{máx}\{x + y, -(x + y)\}$ se tiene entonces por transitividad que $|x| + |y| \geq |x + y|$.

$\square$

La demostración de la parte $b)$ en la proposición anterior fue extraida del libro de Foster [3, Satz 1].
La desigualdad del triángulo tiene otras presentaciones equivalentes que se dan ahora como consecuencia de lo anterior.

Corolario 1.4.2 *Para $x, y \in \mathbb{R}$ arbitrarios se valen:*

a) $|x| - |y| \leq |x - y|$,

b) $|x| - |y| \leq |x + y|$.

Demostración:

a) $x = (x - y) + y$ y así usando la desigualdad del triángulo se obtiene que $|x| \leq |(x - y)| + |y|$ de donde, al trasladar con $-|y|$ se sigue que $|x| - |y| \leq |x - y|$.

b) Basta usar $a)$ para x y $-y$ con el hecho que $|y| = |-y|$:

$$|x| - |y| = |x| - |-y| \underset{a)}{\leq} |x - (-y)| = |x + y|.$$

$\square$

1.4.3. Un par de desigualdades útiles

Se ha visto hasta ahora una desigualdad importante, la desigualdad del triángulo. A continuación se verá un par de desigualdades que son útiles en ciertas aplicaciones.

La siguiente desigualdad es útil al derivar una desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética, esa involucra radicales, los cuales se estudiarán más adelante.

Proposición 1.4.7 *Para cualesquiera dos números* $x, y \in \mathbb{R}$ *se cumple que*

$$xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}.$$

Demostración: Por el teorema 1.4.1 se tiene que $(x-y)^2 \geq 0$. Usando el problema 1.3.9 se tiene que $0 \leq (x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$, de donde al trasladar con $2xy$ (invarianza bajo traslaciones, proposición 1.4.2) se obtiene que $2xy \leq x^2+y^2$. Por último basta utilizar la proposición 1.4.3 sobre la desigualdad anterior multiplicando por el positivo $1/2 > 0$. $\square$

Otra desigualdad muy usada en la práctica es la desigualdad de Bernoulli, que se da a continuación.

Proposición 1.4.8 (Desigualdad de Bernoulli) *Sea* $x \geq -1$*. Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *se cumple que*

$$1 + nx \leq (1+x)^n$$

Demostración: La demostración se hará por inducción sobre n.
B.I. $[\boldsymbol{n = 1}]$. Aquí se da incluso la igualdad:

$$1 + nx = 1 + 1x = 1 + x = (1+x)^1.$$

P.I. $[\boldsymbol{n \Rightarrow n+1}]$. Como $n \in \mathbb{N}$ y $x^2 \geq 0$ (proposición 1.4.1) se tiene del axioma O3) que $nx^2 \geq 0$, con esto

$$\begin{aligned} 1 + (n+1)x &\underset{\text{Prop. 1.4.1}}{\leq} 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &= 1 + nx + x + nx^2 \underset{\text{L.D.}}{=} (1+nx)(1+x) \\ &\underset{\text{H.I. y prop. 1.4.3}}{\leq} (1+x)^n(1+x) = (1+x)^{n+1}, \end{aligned}$$

en la última desigualdad se ha usado que $1 + x \geq 0$. Lo anterior demuestra que efectivamente $1 + (n+1)x \leq (1+x)^{n+1}$. $\square$

1.4.4. Sobre el principio del buen orden.

Se ha definido ya el mínimo y el máximo de una cantidad finita de números reales (def. 1.4.2). Para conjuntos infinitos es posible que no existan máximos ni mínimos. Esto será tema de la sección dedicada al axioma de completez; aquí se requiere sin embargo, el concepto de mínimo un poco más general que el visto hasta ahora, pues es parte de lo que ahora trabajaremos, el último axioma de orden: el principio del buen orden (que se abrevia de ahroa en adelante como PBO).

Definición 1.4.4 *Sea $S \neq \emptyset$, $S \subset \mathbb{R}$. Se dice que $m \in \mathbb{R}$ es un elemento mínimo para S si*

- $m \in S$ *y*
- $m \leq s$ *para todo* $s \in S$.

Como se menciona anteriormente, el PBO dice que *todo subconjunto no vacío de* $\mathbb{N}$ *posee un elemento mínimo.*

Con el PBO es posible demostrar que algunos elementos en $\mathbb{R}$ no son racionales. A manera de ejemplo, si se supone por lo pronto que existe un número $x > 0$ tal que $x^2 = 2$ (su existencia se verá cuando se haya visto el axioma de completez), dicho número se denotará por $\sqrt{2}$.
Se usará a contiuación el PBO para ver que (proposición 1.4.9) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, la demostración está basada en la que se da en el libro [4, pag. 5] (libro con ejemplos interesantes para el álgebra y la teoría de números sobre del PBO).

Antes de enunciar y probar el resultado de que el número $\sqrt{2}$ no es racional se necesitará, como paso previo, saber dónde está situado tal elemento en la recta real, esto es justo lo que dice el siguiente lema.

Lema 1.4.1 *Se cumple que* $1 < \sqrt{2} < 2$.

Demostración: Se deben de probar dos desigualdades: $1 < \sqrt{2}$ y $\sqrt{2} < 2$.Se comenzará probando que $1 < \sqrt{2}$. Si esto no fuera cierto, se tendría $0 < \sqrt{2} \leq 1$ de donde por la proposición 1.4.3 se tendría que $2 < 1$, lo cual es falso, por lo tanto $1 < \sqrt{2}$. De modo similar se argumenta que $\sqrt{2} < 2$ (verifíquelo). $\square$

Proposición 1.4.9 *El número* $\sqrt{2}$ *es irracional, es decir es un número real el cual no es racional.*

Demostración: Procediendo por contradicción, si se supone que existen $p, q \in \mathbb{Z}$ tales que $\sqrt{2} = p/q$, por $c)$ de la proposición 1.3.12, es posible tomar $q \in \mathbb{N}$, por esto el conjunto siguiente es no vacío:

$$\mathcal{D} := \left\{ n \in \mathbb{N} : n\sqrt{2} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Se ha llamado $\mathcal{D}$ al conjunto anterior pues representa a los *denominadores* posibles. Por el PBO debe existir $n_0 \in \mathcal{D}$ elemento mínimo. Del lema anterior se sabe que $1 < \sqrt{2} < 2$ y así multiplicando por el positivo n_0 se tiene que

$$n_0 < n_0\sqrt{2} < n_0(2) = n_0 + n_0$$

de donde al trasladar con $-n_0$ se obtiene que $0 < n_0\sqrt{2} - n_0 < n_0$. Esto dice que el positivo $m_0 := n_0\sqrt{2} - n_0$ es menor al mínimo n_0 del conjunto $\mathcal{D}$, por lo tanto no puede pertencer a $\mathcal{D}$, se tiene entonces que $m_0 \notin \mathcal{D}$ por un lado, pero como se verá a continuación $m_0 > 0$ satisface $m_0 \in \mathcal{D}$; en efecto:

$$m_0\sqrt{2} = (n_0\sqrt{2} - n_0)\sqrt{2} = 2n_0 - n_0\sqrt{2}$$

donde el número del lado derecho es entero al ser suma de dos enteros. Lo anterior muestra que $m_0 \in \mathcal{D}$. Se ha llegado a una contradicción, por lo tanto la hipótesis de que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ tiene que ser falsa.

$\square$

1.4.5. Ejercicios.

Ejercicio 1.4.1 *Encuentre en dónde se sitúan los siguientes números en la recta real.*

- $1/5$ *y* $-1/7$,
- $-3/4$ *y* $7/3$.

Ejercicio 1.4.2 *Sean* $a < b$ *números reales. Demuestre que* $a < (a+b)/2 < b$.

Ejercicio 1.4.3 *Sean* $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, $\cdots$, $a_n < b_n$. *Utilice inducción para demostrar las siguientes afirmaciones:*

a) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < b_1 + b_2 + \cdots + b_n$.

b) Si $a_j > 0$ *para toda* j *entonces* $a_1 a_2 \cdots a_n < b_1 b_2 \cdots b_n$.

Ejercicio 1.4.4 *Sea* $a > 0$ *un número dado. Muestre que:*

a) Si $a < 1$ *entonces* $a^{n+1} < a^n < 1$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$.

b) Si $a > 1$ *entonces* $a^{n+1} > a^n > 1$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 1.4.5 *Sean a y b dos números reales con la siguiente propiedad: Para cada $\varepsilon > 0$ se tiene la desigualdad $a < b+\varepsilon$. Demuestre que $a \leq b$.*
Sugerencia: *Tricotomía.*

Ejercicio 1.4.6 *Demuestre la proposición 1.4.5.*

Ejercicio 1.4.7 *Muestre que para $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple que $ab > 0$ si y solo si se cumple uno de los siguientes:*

- $a, b \in \mathbb{R}_+$ *o bien*
- $-a, -b \in \mathbb{R}_+$.

Ejercicio 1.4.8 *Encuentre* todos *los números reales x para los cuales se satisface:*

$$(x-1)(x+3) > 0\,.$$

Ejercicio 1.4.9 *Resuelva la siguiente desigualdad:* $\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x} > 0.$

Ejercicio 1.4.10 *Muestre que para $0 < a \leq b$ se tiene que*

$$1/(2b) \leq 1/(a+b) \leq 1/(2a).$$

Ejercicio 1.4.11 *Muestre en cada uno de los siguientes casos la implicación indicada, donde x es un número real.*

a) *Si* $|x-2| < 1/100$ *entonces* $|A-5| < 1/25$, *donde* $A = 4x-3$.

b) *Si* $|x+4| < 1/5$ *entonces* $|B+13| < 3/5$, *donde* $B = 3x-1$.

c) *Si* $|x-1| < 1/50$ *entonces* $|C+3| < 1/10$, *donde* $C = 2-5x$.

d) *Si* $|x-2| < \frac{1}{50}$ *entonces* $D := 5x-3$ *satisface* $|D-7| < \frac{1}{10}$.

Ejercicio 1.4.12 *Demuestre que para toda* $x, y \in \mathbb{R}$ *se tienen que*

$$\text{máx}\{x, y\} = \frac{x + y + |y - x|}{2},$$
$$\text{mín}\{x, y\} = \frac{x + y - |y - x|}{2}.$$

El resultado del siguiente ejercicio es de suma importancia para muchos puntos de este libro.

Ejercicio 1.4.13 *Sean* $a \in \mathbb{R}$ *y* $\varepsilon > 0$ *fijos. Demuestre que para* $x \in \mathbb{R}$ *se tiene que:*

$$|x - a| < \varepsilon \textit{ si y solo si } \quad -\varepsilon + a < x < \varepsilon + a.$$

Sugerencia: *Recuerde que* $|x - a| = \text{máx}\{x - a, -(x - a)\}$.

Ejercicio 1.4.14 *Demuestre las siguientes implicaciones donde* $x \in \mathbb{R}$.

a) Si $|x - 2| < 1/10$ *entonces* $|x + 2| < 41/10$ *y* $|x^2 - 4| < 41/100$.

b) Si $|x - 1| < 3/500$ *entonces* $|x + 2| > 1$ *y así* $\left|\frac{1}{x+2} - \frac{1}{3}\right| < 1/500$.

Ejercicio 1.4.15 *Muestre que* $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Ejercicio 1.4.16 *Demuestre que para todo natural* $n \in \mathbb{N}$ *se cumple*

$$\frac{1 + 5^{2n}}{1 + 5^{2n+2}} < \frac{1}{5}.$$

Ejercicio 1.4.17 *Sean* $x, y \in \mathbb{R}_+$.

a) Demuestre que se da la desigualdad

$$x^2 + \frac{y^2}{x^2} \geq 2y.$$

b) Si existe $\sqrt{x}$ *concluya en particular que* $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

c) *¿Para qué valores de* x *e* y *se dan las igualdades en las desigualdades anteriores?*

Ejercicio 1.4.18 *Muestre que* $2^{n-1} + 1 \leq 2^n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 1.4.19 *Demuestre que para* $x \geq 4$ *se cumple que* $2x \leq x^2/2$.

Ejercicio 1.4.20 *Utilice inducción para demostrar que para cada natural* $n > 3$ *se cumple* $n^2 \leq 2^n$.
Sugerencia: *Utilice los dos problemas anteriores.*

Ejercicio 1.4.21 *Demuestre que para cualquier natural* $n \in \mathbb{N}$ *se vale la siguiente dsigualdad*

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 1/(2\sqrt{n+1}).$$

Ejercicio 1.4.22 *Demuestre, utilizando inducción, las siguientes desigualdades donde* $n \in \mathbb{N}$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3 < \frac{n^4}{4} < 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3.$$

Ejercicio 1.4.23 *Muestre que para todo entero* $n \geq 2$ *se cumple*

$$\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

1.4.6. Sobre coeficientes binomiales

El objetivo de esta sección es definir los llamados *coeficientes binomiales*. Prácticamente las propiedades básicas enunciadas aquí pueden mostrarse con los axiomas de grupo y campo, salvo que se estará utilizando el orden al decir, por ejemplo, *para* $0 \leq k \leq n$ *se tiene* $\cdots$. En la sección de ejercicios se pedirá al lector demostrar algunas desigualdades relacionando coeficientes binomiales con potencias o factoriales.

Definición 1.4.5 (Coeficiente binomial) *Sea* $n \geq 1$ *y sea* $\binom{n}{k}$ *el coeficiente de* $x^{n-k}y^k$ *en el desarrollo de la potencia* $(x+y)^n$*, donde* $x \neq 0 \neq y$*. El número* $\binom{n}{k}$ *es llamado coeficiente binomial.*

Debe de observarse que la suma de los exponentes de $x^{n-k}y^k$ es siempre n, el exponente al que se eleva el binomio que se quiere desarrollar $(x+y)^n$.

De $(x+y)^1 = x+y = x^1y^0 + x^0y^1$ se tiene que $\binom{1}{0} = 1 = \binom{1}{1}$. De modo similar, de la identidad

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = x^2y^0 + 2x^1y^1 + x^0y^2$$

se deduce que $\binom{2}{0} = 1 = \binom{2}{2}$ y $\binom{2}{1} = 2$. De aquí y hasta el resto de esta sección se estará suponiendo que $x \neq 0 \neq y$, en caso contrario no se tiene un *bi*nomio.

Proposición 1.4.10 *Todos los monomios que aparecen en el desarrollo de* $(x+y)^n$ *son de la forma* $\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$ *con* $0 \leq k \leq n$*, consecuentemente* $\binom{n}{k} = 0$ *si* $k < 0$ *o si* $k > n$*.*

Demostración: La prueba será por inducción en n.
B.I. $[\boldsymbol{n = 1, 2}]$ Esto es justo el párrafo previo.
P.I. $[\boldsymbol{n \Rightarrow n+1}]$ Supóngase que el desarrrolo de $(x+y)^n$ es

$$\binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}x^0 y^n$$

Para obtener el desarrollo de $(x+y)^{n+1}$ basta multiplicar la expresión anterior por $(x+y)$ y usar los axiomas de grupo y campo, esto debido a que $(x+y)^{n+1} = (x+y)^n(x+y)$, según las leyes de los exponentes. Ahora bien

$$\begin{aligned}
&(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n \\
&= (x+y)\left\{\binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}x^0 y^n\right\} \\
&\underset{L.D.}{=} \binom{n}{0}x^{n+1}y^0 + \left\{\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right\}x^n y^1 + \cdots + \binom{n}{n}x^0 y^{n+1}
\end{aligned}$$

Esto termina el paso inductivo. $\square$

La demostración anterior prueba en particular la llamada **fórmula del binomio** (de Newton):

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}x^0 y^n$$

La demostración de la proposición anterior puede usarse para dar una prueba a las siguientes propiedades básicas de los coeficientes binomiales.

Corolario 1.4.3 *Se valen*

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ y $\binom{n}{1} = n$.
- $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.
- $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

Es de mucha utilidad tomar la siguiente convención: $\binom{0}{0} := 1$.
Con las propiedades anteriores se puede calcular el valor explícito de los coeficientes binomiales utilizando el llamado triángulo de Pascal. Este arreglo puede usarse con las propiedades anteriores notando que la segunda propiedad del corolario anterior, dice que el sumar dos elementos consecutivos en una misma fila produce el elemento de la fila de abajo, que está justo entre ellos.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

Usando además que dicho triángulo empieza y termina con 1 se tiene que

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\ & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\ & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\ & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\ & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\ \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\ & & & & & \cdots & & & & & \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & \vdots & & & \cdots & & & \vdots & & \end{array}$$

Por último, para terminar la sección, se deja la definición de factorial, para que el lector pueda calcular en términos de factoriales los coeficientes binomiales (ver ejercicios abajo).

Definición 1.4.6 *Para cada entero* $n \geq 0$ *se deifine su* factorial *de modo recursivo mediante* $0! := 1$ *y* $n! = n[(n-1)!]$.

1.4.7. Ejercicios

Ejercicio 1.4.24 *Demuestre que para* $0 \leq k \leq n$ *se tiene*

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = n!/(n-k)!.$$

Ejercicio 1.4.25 *Demuestre las siguientes igualdades.*

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$
$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}$$

Sugerencia: $2 = 1 + 1$ *y* $0 = 1 - 1$.

Ejercicio 1.4.26 *Demuestre que para toda* $n \geq 4$ *se tiene que* $2^n \leq n!$.

Ejercicio 1.4.27 *Muestre que para* $0 \leq k \leq n$ *se tiene que*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Sugerencia: *Inducción en* n.

Ejercicio 1.4.28 *Sea* $x \geq 0$. *Demuestre que para* $n \geq 2$ *se tiene*

$$(1+x)^n \geq \frac{n^2}{4}x^2$$

Ejercicio 1.4.29 *Sea* $n \in \mathbb{N}$, *demuestre la siguiente desigualdad.*

$$\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \leq \frac{1}{k!}, \qquad 0 \leq k \leq n.$$

Concluya con lo anterior que para toda $n \in \mathbb{N}$ *se tiene*

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Ejercicio 1.4.30 *Este ejercicio es de suma importancia pues servirá para definir y estudiar el número* e. *Demuestre que*

$$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 3 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sugerencia: *Inducción, encuentre cómo utilizar el ejercicio 1.4.26.*

1.5. El axioma de completez.

Hasta el momento se han visto los axiomas que determinan lo que se llama un *campo ordenado*. Todos los axiomas anteriores los satisfacen, por ejemplo, el campo de números racionales y el de los números reales. A continuación se verá un axioma que los distingue, el axioma de completez. Antes de poder enunciar este axioma se necesitará algo de terminología extra.

Definición 1.5.1 *Sea* $A \subset \mathbb{R}$ *no vacío. Se dice que* A *es* acotado superiormente *si existe un número* $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $a \leq M$ *para todo* $a \in A$. *Un tal número* M *con esta propiedad es llamado* cota superior para A.

Antes de dar ejemplos, se recordará algo de notación clásica de ciertos subconjuntos de $\mathbb{R}$. Sean $a \leq b$, se definen los siguientes conjuntos llamados intervalos.

- Intervalo cerrado: $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.
- Intervalo abierto: $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ y $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.

También se tienen los llamados *rayos*

- $(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$, $\qquad [a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$,
- $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$, $\qquad (-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$.

Ejemplo 1.5.1 *El conjunto $A = [-1, 3/2)$ es acotado superiormente. Para ver esto basta exhibir una cota superior: $a < 3/2$ para cada $a \in A$ y así $3/2$ es cota superior. De hecho también 2 es cota superior de A al igual que $5/2$ y 50.*

Observación. Si un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tiene una cota superior M y se tiene que $\varepsilon > 0$ entonces $M + \varepsilon$ es también cota superior para A. Como consecuencia de esto, *si un conjunto A tiene una cota superior M entonces tiene una infinidad de cotas superiores,* a saber

$$M < M + 1 < M + 2 < \cdots$$

1.5.1. Supremos

A continuación se presenta la definición más importante requerida para enunciar el axioma de completez.

Definición 1.5.2 *Sea $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente. Se dice que un número $\alpha \in \mathbb{R}$ es un* supremo *para A si se cumplen las siguientes condiciones.*

- *α es cota superior para A.*
- *Si M es otra cota superior para A entonces $\alpha \leq M$.*

Debe observarse que el segundo punto indica que α es *mínima* como cota superior. Se tiene ahora el siguiente resultado técnico.

Proposición 1.5.1 *Si existe un supremo para el conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ entonces dicho supremo es único.*

Demostración: Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ supremos para el conjunto A. Se quiere argumentar que $\alpha_1 = \alpha_2$. Como α_2 es cota superior de A y α_1 es mínima cota superior de A al ser supremo, se sigue que $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Del mismo modo: α_1 es cota superior de A y α_2 es mínima como cota superior de A y así $\alpha_2 \leq \alpha_1$.
De $\alpha_1 \leq \alpha_2$ y $\alpha_2 \leq \alpha_1$ se sigue por la propiedad de tricotomía que necesariamente $\alpha_1 = \alpha_2$.

$\square$

Notación. Gracias a la proposición anterior se puede fijar una notación para *el* supremo de A, que solo dependa de A. Se denotará al supremo de A (cuando exista) como $\sup(A)$.
Observe en particular que

- $a \leq \sup(A) \quad \forall a \in A$.
- Si M es cota superior para A entonces $\sup(A) \leq M$.

Ahora sí, ya es posible enunciar el axioma de completez.

Axioma de completez: Si $A \subset \mathbb{R}$ es no vacío y acotado superiormente entonces A posee un supremo.

El siguiente resultado es un ejercicio típico de este tema, se enuncia como proposición para que se incluya su demostración y el lector tenga un ejemplo de cómo trabajar con estos conceptos.

Proposición 1.5.2 *Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que $A \neq \emptyset$, $A \subset B$ y B es acotado superiormente. Se tienen entonces las siguientes.*

a) Existen ambos $\sup(A)$ *y* $\sup(B)$ *y cumplen*

b) $\sup(A) \leq \sup(B)$.

Demostración: Sea M una cota superior para B, la cual existe según la hipótesis. Dado $a \in A$ se tiene que $a \in B$ y entonces necesariamente $a \leq M$. Esto muestra que A es acotado superiormente por M y al ser no vacío existe, por el axioma de completez, $\sup(A)$. Al ser $A \neq \emptyset$ y $A \subset B$ se tiene que $B \neq \emptyset$ pues un elemento de A es también uno de B, al ser B acotado superiormente y no vacío se sigue, nuevamente por el axioma de completez, que existe $\sup(B)$.
Para la segunda parte, observe que se ha mostrado en particular que una cota superior arbitraria M del conjunto B es también cota superior para A, en particular se tiene que $\sup(B)$ es cota superior para A; como $\sup(A)$ es la mínima cota superior de A, de lo anterior se sigue que $\sup(A) \leq \sup(B)$. $\square$

Una de las consecuencias más importantes del axioma de completez es la llamada propiedad arquimediana, la cual se enuncia a continuación en una primera versión.

Teorema 1.5.1 *El conjunto* $\mathbb{N}$ *no es acotado superiormente, consecuentemente* $\mathbb{R}$ *tampoco lo es.*

Demostración: La segunda parte es clara pues una cota superior de $\mathbb{R}$ sería una cota superior para $\mathbb{N}$ (vea la proposición 1.5.2). Para la primera parte, observe que $\mathbb{N} \neq \emptyset$ pues $1 \in \mathbb{N}$. Si $\mathbb{N}$ fuera acotado superiormente entonces, por el axioma de completez existiría $\alpha := \sup(\mathbb{N}) \in \mathbb{R}$. Considere ahora al número real $\beta := \alpha - 1$.

Como $\beta < \alpha$ se puede concluir que β *no* es cota superior para $\mathbb{N}$, pues en caso contrario se tendría $\alpha \leq \beta$ por la minimalidad de α como cota superior de $\mathbb{N}$. Ahora bien, al no ser β una cota superior de $\mathbb{N}$ debe existir $n \in \mathbb{N}$ de tal forma que $\beta < n$. Como $n \in \mathbb{N}$ entonces $n + 1 \in \mathbb{N}$ (definición recursiva de los naturales) y

$$n + 1 \underset{\text{Prop. 1.4.2}}{>} \beta + 1 = \alpha = \sup(\mathbb{N})$$

pero esto es imposible pues $n + 1 \in \mathbb{N}$ y por otro lado $n + 1 \leq \sup(\mathbb{N})$, se contradice así la propiedad de tricotomía. $\square$

La siguiente propiedad es la que de hecho se conoce como *propiedad arquimediana*, se ha comentado antes que también así se hará referencia a la proposición anterior (puede demostrarse de hecho que ambas son equivalentes).

Teorema 1.5.2 (Propiedad arquimediana) *Sea $\varepsilon > 0$. Para cualquier $y \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ con la propiedad de que $n\varepsilon > y$. Consecuentemente, dado $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ de tal forma que $1/n < \varepsilon$.*

Demostración: Para la primera parte considerese al número real y/ε. Este número no puede ser cota superior de $\mathbb{N}$ según la proposición anterior, así que existe $n \in \mathbb{N}$ de tal forma que $n > y/\varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ se sigue de la proposición 1.4.3 que $n\varepsilon > y$ como se quería demostrar.
Para la segunda parte basta tomar el caso particular de $y = 1$. $\square$

Otra consecuencia importante del axioma de completez es la densidad de los racionales en $\mathbb{R}$, esto se verá a continuación.

Sobre la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

Antes de entrar al tema de densidad de $\mathbb{Q}$ se requiere hablar de la parte entera de número. Primero se presenta un lema técnico.

Lema 1.5.1 (Unicidad de la parte entera) *Sea $x \in \mathbb{R}$ y sean $n, m \in \mathbb{Z}$ tales que*

$$n \leq x < n+1,$$
$$m \leq x < m+1.$$

Se tiene entonces que $n = m$.

Demostración: Por la propiedad de tricotomía basta descartar los casos $n > m$ y $n < m$. Si se supone que $n > m$, se obtiene entonces que $n \geq m+1$ y entonces

$$m+1 \leq n \leq x < m+1$$

pero $m+1 < m+1$ contradice la propiedad de tricotomía. Esto concluye la prueba de que $n > m$ es falso.
La prueba de que $n < m$ no se da pues es completamente análoga.

$\square$

Proposición 1.5.3 *Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un y solo un $n \in \mathbb{Z}$ de tal forma que $n \leq x < n+1$.*

Demostración: La unicidad es justamente el lema anterior, así que sólo falta demostrar la existencia. Hay dos casos a tratar: $x = 0$ y $x \neq 0$. Si $x = 0$ basta tomar al entero $n = 0$ pues, dado que $1 > 0$ se tiene claramente que $n = 0 \leq x < 1 = n+1$. Ahora se considerará el caso en que $x \neq 0$. Por la propiedad arquimediana para $\varepsilon = 1 > 0$ existe un natural m_0 tal que $m_0 = m_0(1) > x$; esto muestra que el conjunto $A = \{m \in \mathbb{N} : m > x\}$ es no vacío. Por el PBO existe m_1 elemento mínimo de A. Dado que $m_1 - 1 < m_1$ tiene que darse $m_1 - 1 \notin A$. Como $m_1 - 1 \notin A$ necesariamente se cumple que $m_1 - 1 \leq x$. Sea $n := m_1 - 1$, el cual es un entero (no necesariamente un natural), éste es el entero que se busca pues

$$n \leq x \underset{m_1 \in A}{<} m_1 = n + 1.$$

$\square$

Definición 1.5.3 *Dado $x \in \mathbb{R}$, al número n dado por la proposición anterior se le llama* la parte entera de x *y se le denota con el llamado* corchete de Gauß*: $n = [\![x]\!]$.*

Por la definición del corchete de Gauß se tiene que

$$[\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1.$$

Ahora sí, se cuenta con la herramienta necesaria para demostrar la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, la cual significa que hay muchos racionales en la recta real. El enunciado preciso es el siguiente.

Teorema 1.5.3 (Densidad de racionales) *El conjunto $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, esto es: Para cada par de números $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$ existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.*

Demostración: De la propiedad arquimediana aplicada sobre el real $y - x > 0$ y el positivo $1 \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ con $n(y - x) > 1$. Sea $m = [\![nx]\!] + 1 \in \mathbb{Z}$, claramente $nx < m$. Se afirma que $m < ny$, si esto último no fuera el caso, se tendría, por la tricotomía, que $m \geq ny$ y trasladando con $-nx$ se obtendría:

$$m - nx \geq ny - nx = n(y - x) > 1,$$

de donde $1 < m - nx = [\![nx]\!] + 1 - nx$ y al trasladar con -1 se tiene $0 < [\![nx]\!] - nx \leq 0$, por la definición del corchete de Gauß $[\![nx]\!]$; se sigue entonces que $0 < 0$, lo cual contradice la propiedad de tricotomía; se concluye por tanto que $m < ny$. Se ha demostrado que $nx < m < ny$, de donde $x < \frac{m}{n} < y$; el racional buscado es $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. □

La propiedad de densidad de los racionales en la recta real es muy útil a la hora de hacer algunos detalles en ciertas pruebas. Como ejemplo de esto, se discute a continuación cómo mostrar que el extremo derecho de un intervalo es su supremo.

Ejemplo 1.5.2 *Sea* $A = \left[-1, \frac{3}{2}\right) = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < \frac{3}{2}\}$. *Se quiere arguementar que* $\alpha = 3/2$ *es el supremo de* A. *Primero que nada* $A \neq \emptyset$ *pues* $-1 \in A$ *y* $\frac{3}{2}$ *es una cota superior de* A *pues* $x < \frac{3}{2}$ *para toda* $x \in A$. *Por el axioma de completez existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que* $\alpha = \sup(A)$. *Se va a demostrar ahora que* $\alpha = \frac{3}{2}$.
Ya se sabe que $\alpha \leq \frac{3}{2}$ *pues* $\frac{3}{2}$ *es una cota superior y* α *es la mínima cota superior. Si se demuestra ahora que la desigualdad* $\alpha < \frac{3}{2}$ *es falsa entonces se tendría necesariamente que* $\alpha = \frac{3}{2}$.
Supóngase que $\alpha < \frac{3}{2}$ *fuera cierta. Por ser* $\mathbb{Q}$ *denso en* $\mathbb{R}$ *existe* $r \in \mathbb{Q}$ *con* $\alpha < r < \frac{3}{2}$ *de donde por transitividad se tiene* $-1 \leq r < \frac{3}{2}$, *es decir* $r \in A$. *Esto contradice que* α *es cota superior de* A *pues por construcción de* r *se tiene que* $\alpha < r$. *Se concluye por tanto que* $\alpha < \frac{3}{2}$ *es falsa y con esto que* $\sup(A) = \frac{3}{2}$.

De hecho se puede probar, de modo más general, que el extremo derecho de un intervalo es su supremo, se sugiere al lector hacer el ejercicio 1.5.18 en este momento.

Se ha visto hasta ahora, mediante unas consecuencias del axioma de completez, la importancia de la existencia de supremos, sin embargo el verdadero alcance de este axioma se apreciará en el capítulo sobre funciones continuas al demostrar ciertos teoremas importantes de continuidad.
Dada la importancia de la existencia de supremos, es bueno tener a mano diferentes maneras de verificar quién es el supremo de un conjunto. Una manera la da el siguiente resultado.

Proposición 1.5.4 (Caracterización de supremo) *Sea* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ *acotado superiormente. Para una cota superior* $\alpha \in \mathbb{R}$ *de* A *se tiene que las siguientes son equivalentes:*

a) α *es el supremo de* A.

b) Para cada $\varepsilon > 0$ *existe* $a \in A$ *con* $\alpha - \varepsilon < a \leq \alpha$.

Demostración: Son dos direcciones a demostrar.
$\boxed{a) \Rightarrow b)}$ Sea $\varepsilon > 0$; como $\alpha - \varepsilon < \alpha = \sup(A)$ y α es la mínima cota superior de A se tiene en particular que $\alpha - \varepsilon$ *no* es cota superior de A, por tal motivo existe $a \in A$ de tal modo que $\alpha - \varepsilon < a \leq \alpha$.
$\boxed{b) \Rightarrow a)}$ Sea α una cota superior satisfaciendo la hipótesis sobre los $\varepsilon > 0$; se quiere demostrar que $\alpha = \sup(A)$, para esto debe verificarse que α es mínima como cota superior. Sea entonces M una cota superior para A, se arguementará que $\alpha \leq M$. Si se tuviera lo contrario, es decir $\alpha > M$, para $\varepsilon := \alpha - M > 0$ existiría,

por la hipótesis, $a \in A$ con $a > \alpha - \varepsilon = \alpha - (\alpha - M) = M$, pero $a > M$ implica que M no es cota superior para A, lo cual es contrario a la suposición. $\square$

A continuación se tienen dos resultados importantes en la práctica. El primero es una consecuencia sencilla de la proposición anterior y se dejará como ejercicio (ver el ejercicio 1.5.7) al lector.

Proposición 1.5.5 (Aditividad del supremo) *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ dos conjuntos no vacíos para los cuales existe el supremo correspondiente. Se tiene que el conjunto*

$$A \oplus B := \{a + b : a \in A,\, b \in B\}$$

posee también un supremo que satisface
$\sup(A \oplus B) = \sup(A) + \sup B$.

Proposición 1.5.6 (Multiplicatividad del supremo) *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ subconjuntos no vacíos y acotados superiormente, los cuales constan de números no negativos. Se tiene que el conjunto*

$$A \otimes B := \{ab : a \in A,\, b \in B\}$$

es también acotado superiormente y por tanto posee un supremo el cual satisface $\sup(A \otimes B) = \sup(A)\sup(B)$.

Demostración: Si alguno de $\sup(A)$ o $\sup(B)$ es cero, por ejemplo A, entonces por el problema 1.5.6 se tendría $A = \{0\}$ y con esto que $AB = \{0\}$, de donde trivialmente se daría

$$\sup(A \otimes B) = \sup\{0\} = 0 = 0\sup(B) = \sup(A)\sup(B).$$

Se puede suponer por lo tanto, que se dan ambos de $\sup(A) > 0$ y $\sup(B) > 0$. Como paso previo se mostrará primero que para

cada $a \in A$ con $a > 0$ (existe por el ejercicio 1.5.6) el cociente $\sup(A \otimes B)/a$ es una cota superior para el conjunto B. Para esto sea $b \in B$ arbitrario.
Como $ab \in A \otimes B$ se tiene que $ab \leq \sup(A \otimes B)$ de donde $b \leq \sup(A \otimes B)/a$; esto muestra que efectivamente $\sup(A \otimes B)/a$ es cota superior para B. Esto concluye la prueba del paso previo. Continuando ahora con la demostración, para cada $a > 0$ se tiene que $\sup(A \otimes B)/a$ acota superiormente a B y por lo tanto debe de tenerse que $\sup(B) \leq \sup(A \otimes B)/a$, con lo cuál $a \leq \sup(A \otimes B)/\sup(B)$. Ahora bien, esta última desigualdad vale para cualquier $a \in A$ con $a > 0$, pero obviamente también es cierta para $a = 0$, esto demuestra entonces que $\sup(A \otimes B)/\sup(B)$ es cota superior del conjunto A y por lo tanto debe darse $\sup(A) \leq \sup(A \otimes B)/\sup(B)$, de donde se sigue el resultado. □

1.5.2. Cotas inferiores e ínfimos.

Similarmente al concepto de cota superior existe el concepto de cota inferior.

Definición 1.5.4 *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío. Se dice que A es* acotado inferiormente *si existe un número $m \in \mathbb{R}$ tal que: $m \leq a$ para cada $a \in A$.*
A un número m con esta propiedad se la llama cota inferior *para A.*

Ejemplo 1.5.3 $A_1 = [-1, 2)$, $A_2 = (-1, 2)$ *son ambos acotados inferiormente: -1 es cota inferior en ambos casos.*

Junto con el concepto de cota inferior corresponde el de ínfimo.

Definición 1.5.5 *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado inferiormente. Se dice que un número $\alpha \in \mathbb{R}$ es un ínfimo para A si cumple lo siguiente.*

- *α es cota inferior de A.*
- *α es máxima cota inferior de A, esto es: Si β es cota inferior para A entonces $\beta \leq \alpha$.*

Al igual que en el caso del supremo, el ínfimo es único cuando existe. Por ser la demostración de la siguiente proposición completamente análoga al caso del supremo, se deja al lector como ejercicio.

Proposición 1.5.7 (Unicidad de ínfimos) *Si existe un ínfimo α para el conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ entonces este ínfimo es único.*

Gracias al resultado anterior se puede fijar una notación para el ínfimo de un conjunto que sólo dependa del conjunto.

Notación: $\text{ínf}(A)$ denotará al ínfimo de A cuando éste exista.

De hecho, el ínfimo de un conjunto acotado inferiormente siempre existe como se verá a continuación.

Teorema 1.5.4 *Sea $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado inferiormente. Se tiene entonces que A posee un ínfimo.*

Demostración: Sea $\mathcal{C}$ el sigueinte conjunto de números reales

$$\mathcal{C} := \{m \in \mathbb{R} : m \text{ es cota inferior para } A\}.$$

Es claro que $\mathcal{C} \neq \emptyset$ pues A es acotado inferiormente. Se afirma ahora que $\mathcal{C}$ es acotado superiormente; en efecto, sea $a \in A$ (existe pues $A \neq \emptyset$), si $m \in \mathcal{C}$ entonces $m \leq a$ pues m es cota inferior para A; esto muestra que a es cota superior para $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{C} \neq \emptyset$ y acotado superiormente existe entonces, por el axioma de completez, el supremo de $\mathcal{C}$, digamos $\alpha := \sup(\mathcal{C})$. Se va a demostrar que α es el ínfimo de A, para esto deben de probarse dos cosas: α es una cota inferior para A y α es *máxima* como cota inferior.
Primero, dado $a \in A$ arbitrario se tiene, como antes, que a es cota superior para $\mathcal{C}$ y como α es la mínima de las cotas superiores de $\mathcal{C}$ se sigue $\alpha \leq a$. Esto demuestra que α es cota inferior para A.
Segundo, sea m una cota inferior cualquiera para A. Se tiene que $m \in \mathcal{C}$ y por ser $\alpha = \sup(\mathcal{C})$ (la mínima cota superior) se sigue $m \leq \alpha$; esto muesta que α es máxima cota inferior de A.
Se concluye entonces que α es ínfimo para A. $\square$

Ejemplo 1.5.4 $\inf([a,b]) = \inf([a,b)) = \inf((a,b)) = \inf((a,b]) = a$. *El lector debe comprobar los detalles de estas afirmaciones.*

El ejemplo anterior y el problema 1.5.18 muestran que es posible que $\inf(A)$ y/o $\sup(A)$ no sean elementos de A. Por esta razón se tiene la siguiente definición.

Definición 1.5.6 *Sea* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$.

- *Si* A *es acotado inferiormente y además* $\inf(A) \in A$ *entonces se dice que* $\inf(A)$ *es un* mínimo *y se denota por* $\min(A)$.
- *Si* A *es acotado superiormente y además* $\sup(A) \in A$ *entonces se dice que* $\sup(A)$ *es un* máximo *y se denota por* $\max(A)$.

Debe de observarse que el máximo (o el mínimo) de un conjunto es un tipo especial de supremo (resp. de ínfimo). El lector atento sabe que se tiene aquí un conflicto con la notación y concepto previo de máximo y mínimo dado en la sección de los axiomas de orden, el lector estará tranquilo después de realizar el ejercicio 1.5.19, donde se ve que no existe un tal conflicto.

Al igual que en el caso de supremos (proposición 1.5.4), es posible caracterizar al ínfimo de un conjunto con $\varepsilon > 0$.

Proposición 1.5.8 *Sea $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado inferiormente. Para una cota inferior $\alpha \in \mathbb{R}$ de A son equivalentes las siguientes:*

- *α es ínfimo de A.*
- *Para cada $\varepsilon > 0$ existe $a \in A$ de tal modo que $\alpha \leq a < \alpha + \varepsilon$.*

La demostración es completamente análoga a la de la proposición 1.5.4 y se deja por tanto al lector.

1.5.3. Ejercicios.

Ejercicio 1.5.1 *Determine si el conjunto siguiente es o no acotado superiormente, en caso de serlo determine su supremo.*

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2x-1}{x-5} > 5 \right\}.$$

Ejercicio 1.5.2 *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío. Muestre que si A tiene una cota superior M la cual es elemento de A entonces $M = \sup(A)$.*

Ejercicio 1.5.3 *Sea* $A := \{x \in \mathbb{R} : 5 - x^2 < 9\}$. *Muestre que:*

- $A \neq \emptyset$*,*
- A no *posee un supremo.*

Ejercicio 1.5.4 *Considere el conjunto* $A = \{-1/n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. *Demuestre que existe el supremo de* A *y encuentre su valor.*

Ejercicio 1.5.5 *Sea* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ *un conjunto acotado superiormente y sea* $c \in \mathbb{R}$ *y considere el conjunto* $A \oplus_c := \{a + c : a \in A\}$. *Muestre que:*

- $A \oplus_c$ *posee un supremo,*
- $\sup(A \oplus_c) = \sup(A) + c$*.*

Ejercicio 1.5.6 *Sea* $A \subset [0, +\infty)$ *no vacío y acotado superiormente. Demuestre las siguientes afirmaciones.*

- *Si* $\sup(A) > 0$ *entonces existe* $a \in A$ *tal que* $a > 0$.
- *Si* $\sup(A) = 0$ *entonces* $A = \{0\}$.

Ejercicio 1.5.7 (Aditividad del supremo) *Demuestre la proposición 1.5.5. Enuncie y demuestre el enunciado análogo para ínfimos.*

Ejercicio 1.5.8 *Sean* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$*,* $\emptyset \neq B \subset \mathbb{R}$ *dos conjuntos acotados superiormente.*

a) Demuestre que $A \cup B$ *es no vacío y acotado superiormente y por tanto posee un supremo.*

b) Muestre que de hecho $\sup(A \cup B) = \text{máx}\{\sup(A), \sup(B)\}$.

Ejercicio 1.5.9 *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ dos conjuntos no vacíos tales que:*

$$a \leq b \qquad \forall a \in A\,,\ \forall b \in B$$

Demuestre que:

- *existe* $\sup(A)$ *y es una cota inferior para* B*,*
- *existe* $\operatorname{ínf}(B)$ *y es una cota superior para* A*,*
- *se satisface* $\sup(A) \leq \operatorname{ínf}(B)$.

Ejercicio 1.5.10 *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos los cuales poseen ínfimo en $\mathbb{R}$. Demuestre que en caso de que $A \cap B \neq \emptyset$ se tiene que:*

- *existe* $\operatorname{ínf}(A \cap B)$*,*
- $\operatorname{ínf}(A \cap B) \geq \operatorname{máx}\{\operatorname{ínf}(A), \operatorname{ínf}(B)\}$.

Ejercicio 1.5.11 *Suponga que el conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ es acotado superiormente y considere el conjunto $\ominus A$ definido mediante $\ominus A := \{-a : a \in A\}$. Demuestre que $\ominus A$ es acotado inferiormente y que de hecho $\operatorname{ínf}(\ominus A) = -\sup(A)$.*

Ejercicio 1.5.12 *Sea $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente y sea $k \in \mathbb{R}$ un número dado. Defina el conjunto $M_k[A]$ mediante $M_k[A] := \{ka : a \in A\}$.*

a) *Si $k < 0$ entonces existe $\operatorname{ínf}(M_k[A])$ y además $\operatorname{ínf}(M_k[A]) = k\sup(A)$.*

b) *Si $k > 0$ entonces existe $\sup(M_k[A])$ y además $\sup(M_k[A]) = k\sup(A)$.*

c) *¿Qué puede decirse en el caso $k = 0$?*

Ejercicio 1.5.13 (Multiplicatividad del ínfimo) *Sean* $A, B \subset \mathbb{R}$ *subconjuntos no vacíos y acotados inferiormente, los cuales constan de números no negativos. Demuestre que el conjunto*

$$A \otimes B := \{ab : a \in A,\, b \in B\}$$

también es acotado inferiormente y posee un ínfimo el cual satisface $\text{ínf}(A \otimes B) = \text{ínf}(A)\,\text{ínf}(B)$.

Ejercicio 1.5.14 *Sea* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ *un conjunto acotado superiormente y tal que* $a > 0$ *para toda* $a \in A$. *Considere el conjunto de recíprocos* $r[A] := \{1/a : a \in A\}$. *Demuestre que*

a) $r[A]$ *es no vacío, acotado inferiormente y por tanto existe* $\text{ínf}(r[A])$.

b) Argumente el porqué $\sup(A) > 0$ *y el que* $1/\sup(A)$ *sea cota inferior para* $r[A]$.

c) Demuestre que $\text{ínf}(r[A]) = 1/\sup(A)$.

Ejercicio 1.5.15 *Sea* $A \subset \mathbb{R}$ *un conjunto que posee por supremo a* $\alpha = \sup(A)$. *Demuestre cada una de las siguientes afirmaciones.*

a) Para cada $n \in \mathbb{N}$ *existe* $a_n \in A$ *tal que* $|a_n - \alpha| < 1/n$.

b) Para cada $n \in \mathbb{N}$ *existe* $b_n \notin A$ *tal que* $|b_n - \alpha| < 1/n$.

Ejercicio 1.5.16 *Sea* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ *un conjunto acotado superiormente y tal que* $a > 0$ *para toda* $a \in A$. *Considere el conjunto* *rad*$[A] := \{1/\sqrt{a} : a \in A\}$. *Demuestre que*

a) rad$[A]$ *es no vacío, acotado inferiormente y por tanto existe* $\text{ínf}(\textit{rad}[A])$.

b) Argumente que $1/\sqrt{\sup(A)}$ *es cota inferior para rad*$[A]$.

c) Demuestre que $\text{ínf}(\textit{rad}[A]) = 1/\sqrt{\sup(A)}$.

Ejercicio 1.5.17 *Decida cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuales son falsas, dando una demostración o en su caso un contra ejemplo.*

- $[\![-a]\!] = -[\![a]\!]$,
- $[\![a]\!] = -[\![-a]\!] + 1$,
- $[\![2a]\!] = 2[\![a]\!]$,
- $[\![ab]\!] = [\![a]\!][\![b]\!]$,
- $[\![a+b]\!] = [\![a]\!] + [\![b]\!]$,
- $[\![a+b]\!] \leq [\![a]\!] + [\![b]\!] + 1$.

Ejercicio 1.5.18 *Sean* $a < b$*, demuestre que*

$$\sup([a,b]) = \sup([a,b)) = \sup((a,b)) = \sup((a,b])$$

mostrando que, en cada caso, dicho supremo es precisamente b.

Ejercicio 1.5.19 *Demuestre que el concepto de máximo (resp. mínimo) dado aquí coincide, para el caso finito, con el dado en la sección de los axiomas de orden.*

Ejercicio 1.5.20 *Sean* $p, q \in \mathbb{Q}$ *tales que* $p < q$*. Demuestre que existe un número irracional* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $p < x < q$.
Sugerencia: *Apóyese de la propiedad arquimediana para el positivo* $(q-p)\sqrt{2}$ *y el ejercicio 1.3.14.*

Ejercicio 1.5.21 *Muestre que los números irracionales son densos en* $\mathbb{R}$*, es decir muestre que para cada par de números reales* $a < b$ *existe un número irracional* $x \in \mathbb{R}$ *satisfaciendo* $a < x < b$.
Sugerencia: *Utilice el ejercicio anterior.*

1.5.4. Existencia de $\sqrt{2}$

En secciones anteriores se anunció que se probaría la existencia de $\sqrt{2}$ una vez que el lector haya tenido la oportunidad de trabajar con ínfimos y supremos, éste es ahora el momento.

Teorema 1.5.5 *Existe en $\mathbb{R}_+$ un número α tal que $\alpha^2 = 2$. Dicho número se denota por $\sqrt{2}$.*

Demostración: Sea R_2 el siguiente conjunto

$$R_2 := \{x \in \mathbb{R}_+ : x^2 \leq 2\}.$$

Este conjunto es no vacío pues $1 \in R_2$ claramente. R_2 está acotado superiormente (e inferiormente por cero pero esto último no importa ahora), una cota superior para R_2 es $3/2$, en efecto, si algún $x \in R_2$ satisfaciera $x \geq 3/2 > 0$ entonces se tendría

$$2 \underset{x \in R_2}{\geq} x^2 \underset{\text{Prop. 1.4.3}}{>} \frac{9}{4} > 2$$

lo cual contradice la tricotomía, consecuentemente se tiene que $x \leq 3/2$ para toda $x \in R_2$, es decir $3/2$ es cota superior de R_2. Por el axioma de completez podemos concluir que existe $\alpha := \sup(R_2)$. De hecho se sabe, por todo lo anterior, que $1 \leq \alpha \leq 3/2$. Ahora se procederá a argumentar que este supremo α satisface la condición buscada, que $\alpha^2 = 2$. La manera de demostrar esto será apelando a la tricotomía, es decir, se descartarán los casos $\alpha^2 > 2$ y $\alpha^2 < 2$.

$\alpha^2 < 2$ *es imposible:* Si se supone que se diera $\alpha^2 < 2$, observe que entonces el número $(2-\alpha^2)/3\alpha$ sería positivo (no olvide que $\alpha \geq 1 > 0$) y por lo tanto así también lo es $\min\{\alpha, (2-\alpha^2)/3\alpha\}$, por lo tanto, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, es posible encontrar un $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ satisfaciendo

$$0 < \varepsilon < \text{mín}\{\alpha, (2-\alpha^2)/3\alpha\}. \tag{1.2}$$

Por construcción $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, de hecho se afirma ahora que $\alpha+\varepsilon \in R_2$. Para ver esto debe observarse que por construcción $\varepsilon < \alpha$ y con esto se tiene en particular, trasladando con 2α, que $2\alpha + \varepsilon < 3\alpha$, al multiplicar por el positivo ε se obtiene

$$\varepsilon(2\alpha + \varepsilon) < 3\alpha\varepsilon. \tag{1.3}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}(\alpha+\varepsilon)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\varepsilon + \varepsilon^2 &\underset{L.D.}{=} \alpha^2 + \varepsilon(2\alpha+\varepsilon)\\ &\underset{(1.3)}{<} \alpha^2 + 3\alpha\varepsilon \underset{(1.2)}{<} \alpha^2 + (2-\alpha^2) = 2\end{aligned}$$

lo cual dice que $\alpha + \varepsilon \in R_2$. Esto es un absurdo pues $\varepsilon > 0$ y así $\alpha + \varepsilon > \alpha$ pero $\alpha + \varepsilon \in R_2$ implica que $\alpha + \varepsilon \leq \alpha = \sup(R_2)$ y se contradice la tricotomía.

$\alpha^2 > 2$ *es imposible:* Se procede nuevamente por contradicción, suponiendo que $\alpha^2 > 2$. Sea $p := \frac{1}{2}(\alpha + 2/\alpha)$. Primero que nada observe que este número es positivo y

$$\alpha > \alpha - \frac{(\alpha^2-2)}{2\alpha} = \frac{2\alpha^2 - \alpha^2 + 2}{2\alpha} = \frac{\alpha^2+2}{2\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2+2}{\alpha}\right) = p.$$

Esto muestra que $\alpha > p$. Ahora bien,

$$p^2 = \frac{1}{4}\left(\alpha + \frac{2}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\alpha^2 + \frac{4}{\alpha^2} + 4\right) \underset{\text{Ejerc. 1.4.17 a)}}{>} \frac{1}{4}(4+4) = 2.$$

Se tiene entonces que $p^2 > 2$. Por otro lado, por la proposición 1.5.4, para el positivo $\varepsilon := \alpha - p$ se tiene que existe $x_0 \in R_2$ de tal modo que

$$p = \alpha - \varepsilon < x_0 \leq \alpha,$$

con lo cual

$$2 < p^2 < x_0^2 \underset{x_0 \in R_2}{\leq} 2$$

que contradice tricotomía. $\square$

En este punto es bueno mencionar algunas propiedades de raíces cuadradas en general.

Definición 1.5.7 *Una raíz cuadrada de un número $a \in \mathbb{R}$ es un número x tal que $x^2 = a$.*

Trivialmente se tiene que:

- Si un número a posee una raíz cuadrada $x \in \mathbb{R}$ entonces $a = x^2 \geq 0$ (teo. 1.4.1) y por tanto no existen raíces cuadradas de números negativos.

- Si x es raíz de a entonces $-x$ también (regla de los signos): $(-x)^2 = x^2 = a$.

- La única raíz cuadrada de 0 es 0.

- Si un número $a > 0$ posee una raíz cuadrada positiva ésta es única: Esto es una consecuencia de la identidad $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$.

Por lo anterior (último punto en particular) se denota por $\sqrt{a}$ a la raíz cuadrada positiva de un número $a > 0$ (cuando exista). El ejercicio 1.5.23 está diseñado para que el lector pueda demostrar la existencia de raíces cuadradas positivas en general.

1.5.5. Ejercicios

El objetivo del siguiente par de ejercicios es reforzar el entendimiento de la demostración de la existencia de $\sqrt{2}$. El segundo es de hecho el caso general.

Ejercicio 1.5.22 (Existencia de $\sqrt{3}$) *Sea* $R_3 := \{x \in \mathbb{R}_+ : x^2 \leq 3\}$. *Demuestre cada una de las siguientes afirmaciones.*

- R_3 *es no vacío y acotado superiormente por* $9/5$. *Sea* $\alpha := \sup(R_3)$, $\alpha \geq 1$.
- *Muestre que si se tuviera* $\alpha^2 < 3$, *entonces eligiendo cualquier* $\varepsilon \in \mathbb{R}$ *que satisfaga*

$$0 < \varepsilon < \text{mín}\left\{\alpha, \frac{3-\alpha^2}{3\alpha}\right\}$$

  se tendría que $\alpha + \varepsilon \in R_3$ *y esto lleva a una contradicción.*
- *Suponga que se tuviera que* $\alpha^2 > 3$. *Sea* $p \in \mathbb{R}_+$ *dado por* $p = (1/2)(\alpha + 3/\alpha)$.
  - *Muestre que* $\alpha > p$ *y que* $p^2 > 3$.
  - *Pruebe que existe* $x_0 \in R_3$ *con* $p < x_0 \leq \alpha$.
  - *Observe que los dos puntos anteriores contradicen la tricotomía:* $3 < 3$.
- *Concluya de todo lo anterior que* $\alpha^2 = 3$.

Ejercicio 1.5.23 (Existencia de $\sqrt{w}$) *Sea* $w \in \mathbb{R}_+$ *y considere el conjunto* $R_w := \{x \in \mathbb{R}_+ : x^2 \leq w\}$. *Demuestre cada una de las siguientes afirmaciones.*

- R_w *es no vacío y acotado superiormente por* $1+w$. *Sea* $\alpha := \sup(R_w)$.

- *Muestre que si se tuviera* $\alpha^2 < w$, *entonces eligiendo cualquier* $\varepsilon \in \mathbb{R}$ *que satisfaga*

$$0 < \varepsilon < \text{mín}\left\{\alpha, \frac{w-\alpha^2}{3\alpha}\right\}$$

  se tendría que $\alpha + \varepsilon \in R_w$ *y esto lleva a una contradicción.*

- *Suponga que se tuviera que* $\alpha^2 > w$. *Sea* $p \in \mathbb{R}_+$ *dado por* $p = (1/2)(\alpha + w/\alpha)$.

  - *Muestre que* $\alpha > p$ *y que* $p^2 > w$.
  - *Pruebe que existe* $x_0 \in R_w$ *con* $p < x_0 \leq \alpha$.
  - *Observe que los dos puntos anteriores contradicen la tricotomía:* $w < w$.

- *Concluya de todo lo anterior que* $\alpha^2 = w$.

Ejercicio 1.5.24 *Muestre que si* $a > b > 0$ *entonces* $\sqrt{a} > \sqrt{b} > 0$.

Ejercicio 1.5.25 *Demuestre que* $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2}}} > 2$.

Ejercicio 1.5.26 *Sea* $a \in \mathbb{R}$ *y* $n \in \mathbb{N}$. *Se dice que* $x \in \mathbb{R}$ *es raíz* n-*ésima de* a *si* $x^n = a$. *Muestre que si* $a \geq 0$ *posee una raíz* n-*ésima positiva entonces ésta es única. Dicha raíz se denota por* $\sqrt[n]{a}$.

Ejercicio 1.5.27 *Verifique las siguientes propiedades, donde* $a, b \geq 0$*; recuerde que deben ser diferentes de cero, como siempre, si aparecen en denominadores.*

a) $\sqrt[n]{1} = 1$.

b) $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$.

c) $(\sqrt[n]{a})(\sqrt[n]{b}) = \sqrt[n]{ab}$

d) $\sqrt[n]{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}}$ *y en particular* $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$.

e) $\sqrt[n]{(\sqrt[m]{a})} = \sqrt[nm]{a}$.

f) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$*, este número común es denotado* $a^{m/n}$.

Ejercicio 1.5.28 *Muestre que si* $0 \leq a < b$ *entonces* $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

2 Sucesiones de números reales

Este es el capítulo más importante del libro, se concentra en la teoría de sucesiones de números reales e incluye una introducción a series. Muchas de las demostraciones posteriores se basarán en ideas, pruebas o resultados que aquí se exponen.

2.1. Sucesiones y convergencia.

Para definir formalmente el concepto de sucesión se requiere estar familiarizado con el concepto de función.

Una sucesión de números reales es una función $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Se escribe a_n en lugar de $a(n)$. Pese a que se está suponiendo que el lector ha llevado un curso introductorio de lógica y conjuntos, y está familiarizado con el concepto de función, será más conveniente (por ahora), quedarse con la idea intuitiva de sucesión, que es la más útil en la práctica.

2.1.1. Definiciones básicas

Una sucesión es, intuitivamente hablando, una lista ordenada de números reales.

Definición 2.1.1 *Una sucesión de números reales* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una lista infinita ordenada de números reales*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_1, a_2, a_3, \cdots).$$

En la definición anterior se usa paréntesis $()$ en lugar de las tradicionales llaves $\{\}$ para enfatizar que el conjunto de números dado está ordenado; esto significa que *no* es lo mismo

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, \cdots)$$

que por ejemplo

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \cdots),$$

en la primera $a_2 = 1$ pero en la segunda $b_2 = 2$.

Ejemplo 2.1.1 *Ejemplos básicos, pero importantes, de sucesiones son las siguientes.*

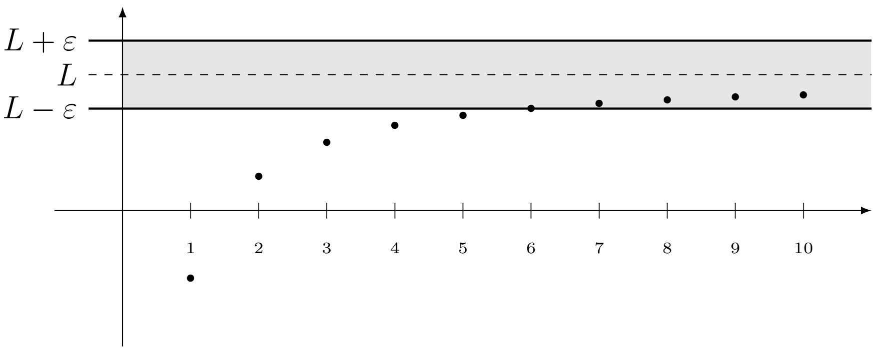
- ***Sucesión constante:*** *Si existe* $c \in \mathbb{R}$ *de tal modo que* $a_n = c$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$ *se dice que la sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es constante. Aquí* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c, c, c, \cdots)$.
- ***Sucesión armónica:*** *Esta es la que cumple que* $a_n = 1/n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *De modo explícito* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots)$.
- ***Sucesión geométrica:*** *Si existe* $r \in \mathbb{R} - \{0\}$ *de tal modo que* $a_n = r^{n-1}$ *se dice que la sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es geométrica con razón* r*; aquí* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, r, r^2, r^3, \cdots)$. *En ocaciones conviene tratar a la sucesión constante cero como geométrica.*

- ***Sucesión aritmética:*** *Si existen* $a, d \in \mathbb{R}$ *de tal modo que* $a_n = a + (n-1)d$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *entonces la sucesión se dice aritmética con diferencia* d *y término inicial* a*. De modo explícito* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a, a+d, a+2d, a+3d, \cdots)$.

Algo que interesa siempre sobre las sucesiones es saber si son o no convergentes, concepto que se define a continuación.

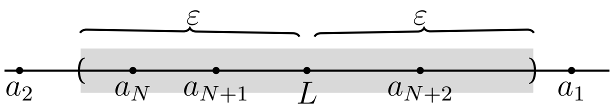
Definición 2.1.2 *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números reales y* $L \in \mathbb{R}$*. Se dice que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* L *(o que* L *es límite para* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*) si se cumple lo siguiente: Para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *de tal forma que siempre que* $n \geq N$ *entonces* $|a_n - L| < \varepsilon$*.*
Se escribe $a_n \longrightarrow L$ *cuando* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converja a* L*.*

La definición dice que los elementos a_n de la sucesión están cada vez más y más cercanos a L: si se fija una distancia $\varepsilon > 0$ (por más pequeña que se quiera elegir) siempre será posible *eliminar* los primeros índices n, para garantizar que a partir de un cierto N, se tenga que la distancia $|a_n - L|$ es menor que $\varepsilon > 0$. La mejor forma para hacerse una buena idea es con una gráfica que represente los índices n contra los valores a_n, gráfica en el plano $\mathbb{R}^2$.



Para el ε de la figura, debe tomarse $N = N_\varepsilon = 7$ para garantizar que, para cada $n \geq N$, a_n está en la zona gris, es decir, cumple $|a_n - L| < \varepsilon$.

Si el lector lo prefiere y le da una mejor idea, puede dibujar en lugar de una gráfica en $\mathbb{R}^2$, una en $\mathbb{R}$: por definición de convergencia, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ de tal modo que en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, de radio ε centrado en L, se encuentran todos los elementos de la sucesión, salvo quizás $a_1, a_2, \cdots, a_{N-1}$.



Ejemplo 2.1.2 *Se tiene que:*

a) Toda sucesión constante es convergente.

b) La sucesión armónica converge a 0.

c) La sucesión $(n/(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* 1.

La demostración de las afirmaciones anteriores es como sigue.
a) *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión constante, esto es, existe* $c \in \mathbb{R}$ *de tal forma que* $a_n = c$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$. *Se demostrará que* $a_n \longrightarrow c$. *Para ver esto sea* $\varepsilon > 0$. *Basta tomar* $N = 1$, *pues si* $n \geq 1$ *entonces*

$$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

b) *Esto es consecuencia de la propiedad arquimediana (teorema 1.5.2). Dado* $\varepsilon > 0$ *se sabe que existe* $N \in \mathbb{N}$ *de tal modo que* $1/N < \varepsilon$, *esta* N *es una que funciona: Si* $n \geq N$ *se tiene, por la proposición 1.4.4, que* $1/n \leq 1/N < \varepsilon$.

c) *Nuevamente se considera, para* $\varepsilon > 0$, *el* N *de la propiedad arquimediana que garantiza que* $1/N < \varepsilon$*: Dado* $n \geq N$, *se sigue que* $n+1 > N$ *y al igual que en* b) *se obtiene* $1/(n+1) < \varepsilon$*; con esto*

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left| -\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

La siguiente proposición es de importancia teórica y dice que una misma sucesión no puede converger a números diferentes.

Proposición 2.1.1 (Unicidad del límite) *Si la sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* L *y también a* M *entonces* $L = M$.

Demostración: Si se tuviera $L \neq M$, se tendría con esto que el número real $\varepsilon := |L - M|/2$ es positivo. Ahora bien, como
$a_n \longrightarrow L$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

Del mismo modo, $a_n \longrightarrow M$, así que existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq N_2 \Rightarrow |a_n - M| < \varepsilon.$$

Para $N = \max\{N_1, N_2\}$ se cumple que si $n \geq N$, entonces $n \geq N_j$ $j = 1, 2$ (por transitividad), así que se dan las dos implicaciones anteriores; ahora bien

$$\begin{aligned}|L - M| &= |L - a_n + a_n - M|\\ &\leq |a_n - L| + |a_n - M| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |L - M|\end{aligned}$$

pero $|L - M| < |L - M|$ contradice la propiedad de tricotomía.$\square$

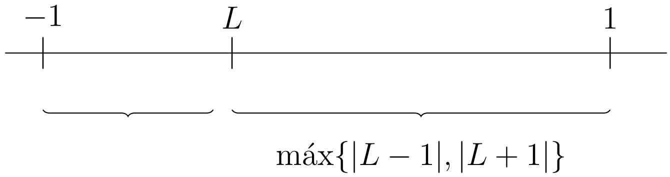
Dado que se ha demostrado que el límite es único y depende sólo de la sucesión (cuando existe) se acostumbra a escribir $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ para representar al número L con la propiedad de que $a_n \longrightarrow L$.

2.1.2. Ejemplo de divergencia.

Para terminar esta sección se dará un ejemplo de cómo demostrar que alguna sucesión es *divergente*, i.e. no convergente. Una forma es usando directamente la negación de la definición, esto es:

$$\forall L\, \exists \varepsilon_0 > 0 \,:\, \forall N \in \mathbb{N}\, \exists n_0 \geq N \,:\, |a_{n_0} - L| \geq \varepsilon_0.$$

Como ejemplo concreto se analiza a continuación la sucesión dada por $a_n = (-1)^n$. Es claro, de modo intuitivo, que esta sucesión no *se va pareciendo* cada vez más a un valor L pues *brinca* entre -1 y 1. Una prueba formal de la divergencia sería, según lo discutido hace un momento, como sigue:
Sea $L \in \mathbb{R}$ arbitrario. Observe que alguno de $|L-1|$ o $|L+1|$ debe ser diferente de cero (ambos cero al mismo tiempo implicaría $-1 = 1$), por lo tanto puede elegirse $\varepsilon_0 > 0$ (densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$) con $0 < \varepsilon_0 < \text{máx}\{|L-1|, |L+1|\}$.



Ahora bien, dada cualquier $N \in \mathbb{N}$, se tiene que $2N, 2N+1 \geq N$ y alguno de $|a_{2N} - L|$ o $|a_{2N+1} - L|$ coincide con $\text{máx}\{|L-1|, |L+1|\}$, el correspondiente índice de coincidencia será n_0. Se tiene entonces que para éste $n_0 \geq N$ se cumple

$$|a_{n_0} - L| = \text{máx}\{|L-1|, |L+1|\} > \varepsilon_0;$$

esto concluye la argumentación.

Esta prueba tiene el problema de lidiar con la variable L en todo momento. La mayoría de las veces es más cómodo trabajar por contradiccón del siguiente modo, suponer que el límite L existe y *eliminar* L de alguna manera, por ejemplo usando la desigualdad del triángulo:

$$|a_n - L| + |a_m - L| \geq |(a_n - L) - (a_m - L)| = |a_n - a_m|.$$

A continuación se demostrará nuevamente el ejemplo discutido anteriormente pero usando ahora esta técnica.

Ejemplo 2.1.3 *La sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, con* $a_n = (-1)^n$*, es divergente.*
Si se supone, por el contrario, que esta sucesión es convergente a L*, entonces en particular para* $\varepsilon = 1 > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *de tal forma que si* $n \geq N$ *entonces* $|a_n - L| < 1$*.*
Ahora bien, para $n \geq N$ *(también* $n + 1 \geq N$*) se tiene*

$$2 = |a_n - a_{n+1}| \leq |a_n - L| + |a_{n+1} - L| < 1 + 1 = 2$$

lo cual contradice la propiedad de tricotomía.

El lector podrá apreciar lo mucho más corta y simple que es esta prueba en comparación con la de la negación de la definición de convergencia.

2.1.3. Ejercicios.

Ejercicio 2.1.1 *Muestre que cada una de las siguientes sucesiones* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *son convergentes.*

a) $a_n = (-1)^n/n$.

b) $a_n = 1/(2n+1)$

c) $a_n = 5/(2n)$.

d) $a_n = 2n/(n+1)$.

e) $a_n = n/(3n+1)$.

f) $a_n = (2n-1)/(3n+1)$.

Ejercicio 2.1.2 *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión dada.*

- *Muestre que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L entonces $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $|L|$.*

- *De un ejemplo donde $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ sea convergente pero $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no lo sea.*

- *Muestre que si $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también converge a 0.*

Ejercicio 2.1.3 *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión dada y $L \in \mathbb{R}$. Muestre que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L si y solo si $(|a_n - L|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.*

Ejercicio 2.1.4 *Demuestre que $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.*
Sugerencia: *Utilice la desigualdad de Bernoulli para mostrar primero que $2^n \geq 1+n > n$.*

Ejercicio 2.1.5 *Generalice el ejercicio anterior: Sea $r > 1$ un número dado. Demuestre que la sucesión $\left(\frac{1}{r^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.*
Sugerencia: *Existe $\delta > 0$ con $r = 1 + \delta$, utilice desg. de Bernoulli*

Los dos siguientes ejercicios son de importancia teórica, pues dicen que para la convergencia de una sucesión no importa lo qué pase *al principio*, sino *al final*.

Ejercicio 2.1.6 *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión dada y sea* $N_0 \in \mathbb{N}$ *un natural prefijado. Se define una nueva sucesión mediante* $b_n := a_{N_0+n-1}$. *Muestre que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente si y solo si* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *también lo es.*

Ejercicio 2.1.7 *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión dada y sea* $N_0 \in \mathbb{N}$ *un natural prefijado. Se eligen ahora constantes arbitrarias* $c_1, c_2, \cdots, c_{N_0} \in \mathbb{R}$ *y se fijan. Con esto se define una nueva sucesión* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mediante*

$$b_n := \begin{cases} c_n & \textit{si } n \leq N_0 \\ a_n & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Muestre que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente si y solo si* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ejercicio 2.1.8 *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión dada y* $L \in \mathbb{R}$. *Con esta se construyen otras dos sucesiones* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mediante* $p_n := a_{2n}$ *y* $i_n := a_{2n+1}$. *Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes*

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* L.
- *Ambas sucesiones* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergen a* L.

Ejercicio 2.1.9 (Sumas de Cesàro) *Se dice que una sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es* Cesàro-sumable *si la sucesión* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por*

$$s_n := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

es convergente. Demuestre las siguientes afirmaciones.

- *Toda sucesión convergente es Cesàro-sumable. De modo más preciso, si la sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* L *entonces la sucesión asociada* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* L.

- *Si una sucesión es Cesàro-sumable entonces no necesariamente es convergente.*

Sugerencia: *Para el primer punto: si en algún momento se fija* $N \in \mathbb{N}$ *y se define la constante* $c := a_1 + a_2 + \cdots + a_N$ *entonces la sucesión* $(c/n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* 0.

2.2. Propiedades aritméticas de sucesiones convergentes

A continuación se empezará con el estudio de las propiedades aritméticas de límites de sucesiones convergentes, estas propiedades son importantes para manipular algebraicamente sucesiones.

Proposición 2.2.1 (Sumas de sucesiones convergentes) *Sean* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dos sucesiones en* $\mathbb{R}$ *las cuales convergen a* L *y a* M *respectivamente. Se tiene entonces que la sucesión de sumas* $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es también convergente con límite* $L + M$.

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Para el positivo $\varepsilon/2$ es posible encontrar $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ respectivamente tales que:

$$n \geq N_1 \Longrightarrow |a_n - L| < \varepsilon/2\,,$$
$$n \geq N_2 \Longrightarrow |b_n - M| < \varepsilon/2\,.$$

Sea $N := \max\{N_1, N_2\}$, así $N \geq N_j$ y por tanto para $n \geq N$ se cumple $n \geq N_j$, $j = 1, 2$, y con esto las implicaciones anteriores, así para $n \geq N$ se tiene

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (L + M)| &= |(a_n - L) + (b_n - M)| \\ &\underset{\text{Des. tria.}}{\leq} |a_n - L| + |b_n - M| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba de que $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = L + M$. $\square$

Antes de analizar el producto es conveniente recordar el siguiente concepto.

Definición 2.2.1 *Se dice que una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada si existe $M > 0$ de tal modo que $|a_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Es lo mismo decir que una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada a decir que el conjunto de números reales $\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado superiormente. El siguiente resultado dice que ésta es una propiedad de todas las sucesiones convergentes.

Teorema 2.2.1 *Toda sucesión convergente es acotada.*

Demostración: Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a $L \in \mathbb{R}$. Para $1 > 0$ existe $N \in N$ con la propiedad de que si $n \geq N$ entonces $|a_n - L| < 1$. Para $n \geq N$ se tiene, de la desigualdad del triángulo, que

$$|a_n| \leq |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < 1 + |L|.$$

Sea $M_1 := \text{máx}\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|\}$, se considera entonces el número $M = \text{máx}\{M_1, 1 + |L|\}$. Claramente $|a_n| \leq M$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y por tanto la sucesión es acotada. $\square$

En la práctica esta propiedad es de mucha utilidad al mostrar que alguna cierta suceción no es convergente, esto se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.1 *La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2n-1)_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente. Si esta sucesión fuera convergente entonces debería ser acotada, según el teorema 2.2.1, por algún número $M > 0$. Ahora bien, de*

$|a_n| \leq M$ e tiene $2n - 1 < M$ y así $n < (M+1)/2$ para toda $n \in \mathbb{N}$; esto último contradice la propedad arquimediana, es decir, contradice que el conjunto $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente.

Proposición 2.2.2 (Producto de sucesiones convergentes) *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones en $\mathbb{R}$ las cuales convergen a L y a M respectivamente. Se tiene entonces que la sucesión de productos $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite LM.*

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$; se está interesado en analizar la diferencia $|a_nb_n - LM|$.

$$\begin{aligned} |a_nb_n - LM| &= |a_nb_n - a_nM + a_nM - LM| \\ &= |a_n(b_n - M) + M(a_n - L)| \\ &\underset{\text{Prop. 1.4.6}}{\leq} |a_n||b_n - M| + |M||a_n - L|. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$|a_nb_n - LM| \leq |a_n||b_n - M| + |M||a_n - L|$$

será fácil ver el cómo se debe proceder para lograr que $|a_nb_n - LM| < \varepsilon$. Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, por la prop. 2.2.1, existe una constante $K > 0$ de tal forma que $|a_n| < K$, con esto se logra ver, por transitividad en desigualdades, que

$$|a_nb_n - LM| \leq K|b_n - M| + |M||a_n - L|. \tag{2.1}$$

Dado que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes es posible elegir $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ de tal forma que:

$$\begin{aligned} n \geq N_1 &\Longrightarrow |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2(|M|+1)}, \\ n \geq N_2 &\Longrightarrow |b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2K}. \end{aligned}$$

Sea $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$. Ahora bien, para $n \geq N \geq N_j$ se tiene

$$\begin{aligned} |a_n b_n - LM| &\underset{(2.1)}{\leq} K|b_n - M| + |M||a_n - L| \\ &< K\frac{\varepsilon}{2K} + |M|\frac{\varepsilon}{2(|M|+1)} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{|M|}{|M|+1}\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}(1) = \varepsilon. \end{aligned}$$

lo cual demuestra que efectivamente $a_n b_n \longrightarrow LM$. □

Se ha utilizado más de una vez, un paso del tipo *a partir de* N_1 *se cumple tal cosa* y *a partir de* N_2 *tal otra*, el procedimiento para obtener una sola N tal que a partir de ella se cumplan *ambas cosas* a la vez es claro: basta tomar $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$. Se recomienda por tanto resolver el ejercicio 2.2.1 ahora, dado que dicho resultado se estará utilizando a partir de este momento.

Corolario 2.2.1 ***(Combinaciones lineales de sucesiones convergentes)*** *Sean* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesiones convergentes y sean* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. *La sucesión* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por las combinaciones lineales* $c_n = \lambda a_n + \mu b_n$ *es también convergente. Mas aún se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n + \mu \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Demostración: Sean L y M los límites correspondientes, es decir $a_n \longrightarrow L$ y $b_n \longrightarrow M$. La sucesión constante $(\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente según el ejemplo 2.1.2 así que, por la proposición 2.2.2 la sucesión $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a λL. Por las mismas razones $(\mu b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a μM. Basta ahora usar la prop. 2.2.1 para concluir que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\lambda L + \mu M$. □

El lector debe observar lo que el corolario anterior dice en el caso especial en que $\mu = 0$.

En lo que respaecta a las operaciones aritméticas básicas hace falta estudiar la división. Antes de esto será de utilidad demostrar el siguiente reultado de importancia teórica.

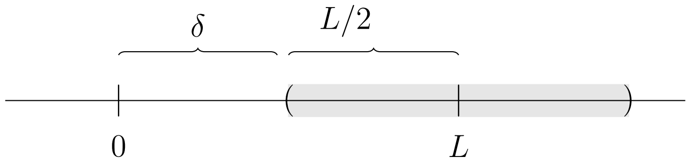
Teorema 2.2.2 (Preservación del signo) *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión convergente a* $L \in \mathbb{R}_+$. *Existen entonces* $\delta > 0$ *y* $N \in \mathbb{N}$ *de tal forma que:*

$$n \geq N \Longrightarrow a_n > \delta > 0$$

Demostración: Como $a_n \longrightarrow L$, para el positivo $L/2 > 0$ es posible encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq N \Longrightarrow |a_n - L| < \frac{L}{2}.$$

Se afirma ahora que estos $\delta := L/2$ y N son los que se buscan.



En efecto, si $n \geq N$ entonces $L/2 > |L - a_n| \geq L - a_n$ y al trasladar $L/2 > L - a_n$ con $a_n - L/2$ se tiene $a_n > L/2 = \delta > 0$. □

Debe observarse que si una sucesión converge a un número positivo, todos, *salvo quizás un número finito* de sus elementos, son también positivos y de hecho mayores que un cierto positivo δ. También se hará referencia al siguiente resultado como preservación del signo.

Corolario 2.2.2 *Si una sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a un número* $L < 0$ *entonces existe* $N \in \mathbb{N}$ *y* $\delta > 0$ *tal que para todo* $n \geq N$ *se tiene* $a_n < -\delta < 0$.

Demostración: Usando la proposición de combinaciones lineales de sucesiones convergentes (prop. 2.2.1) se tiene que $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $-L > 0$ y por el teorema 2.2.2 existen $\delta > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que si $n \geq N$ entonces $-a_n > \delta > 0$ con lo cual $a_n < -\delta < 0$.

$\square$

Proposición 2.2.3 (Cocientes de sucesiones convergentes) *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a L y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una convergente a $M \neq 0$. Se tienen entonces que*

a) $(1/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* $1/M$*,*

b) $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* L/M*.*

Demostración: Antes de empezar con las demostraciones debe observarse que, por la de preservación del signo, se tiene que $b_n \neq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, salvo quizás para un número finito de naturales n. Esto muestra que tanto los recíprocos como los cocientes definidos en el enunciado tienen sentido. Se supondrá por lo tanto que $b_n \neq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
a) Sea $\varepsilon > 0$, se quiere acotar la diferencia

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{M}\right| = \frac{|b_n - M|}{|b_n||M|} = \frac{1}{|M|}\left(\frac{1}{|b_n|}\right)|b_n - M|.$$

Los factores de la derecha ayudan a hacer dicha tarea; sea $N \in N$ de tal modo que si $n \geq N$ entonces $0 < \delta < |b_n|$ (preservación del signo). Cambiando N por una más grande si es necesario (ver ejercicio 2.2.1), se puede suponer que para $n \geq N$ se tiene también que $|b_n - M| < \varepsilon(\delta|M|)$. Ahora bien, si $n \geq N$ se tiene

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{M}\right| = \frac{1}{|M|}\left(\frac{1}{|b_n|}\right)|b_n - M| < \frac{1}{|M|}\left(\frac{1}{\delta}\right)\varepsilon(\delta|M|) = \varepsilon$$

b) Aquí basta observar que $a_n/b_n = a_n(1/b_n)$ y utilizar la proposición 2.2.2 con a).

$\square$

Las propiedades aritméticas discutidas en la sección son un arma fuerte para demostrar convergencia de sucesiones con cierta complejidad aritmética. A continuación se ilustra esto mediante un par ejemplos.

Ejemplo 2.2.2 *Se tienen:*

- $(1/n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* 0*. De hecho usando inducción se tiene que* $(1/n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* 0*.*
- $a_n := (5n^2 + 13n)/(15n^2 - 7n) \longrightarrow 1/3$.

Las afirmaciones anteriores se demustran como sigue.
$a)$ $1/n^2 = (1/n)(1/n)$ *así que por prop. 2.2.2 dicha sucesión converge a* $0(0) = 0$*. La afirmación general es por inducción matemática (hágalo) usando que*

$$1/n^k = (1/n^{k-1})(1/n).$$

$b)$ *Primero se reescribe* a_n *como sigue*

$$a_n = \frac{\frac{1}{n^2}(5n^2 + 13n)}{\frac{1}{n^2}(15n^2 - 7n)} = \frac{5 + 13(\frac{1}{n})}{15 - 7(\frac{1}{n^2})}.$$

El numerador es $c_n = 5+13(\frac{1}{n})$ *y el denominador es* $d_n = 15-7(\frac{1}{n^2})$*. El numerador es una combinación lineal de la sucesión armónica (que converge a* 0*) y la sucesión constante* 1*, así que converge a (ver coro. 2.2.1)* $5 + 13(0) = 5$*. El denominador es combinación lineal de la sucesión constante* 1 *y* $(1/n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ *que converge a* 0 *por* $a)$*. Nuevamente por el coro. 2.2.1 se tiene que* $d_n \longrightarrow 15 - 7(0) = 15 \neq 0$*.*

Por último, observe que es posible aplicar la proposición 2.2.3 para concluir que

$$a_n = \frac{c_n}{d_n} \longrightarrow \frac{5}{15} = 1/3.$$

Hay que tener cuidado al aplicar las propiedades aritméticas de las sucesiones, éstas requieren que se *sepa* o *demuestre* previamente que se tienen sucesiones convergentes, para con ellas obtener otras convergentes mediante operaciones aritméticas.

Otra operación aritmética importante es la de calcular raíces cuadradas, la cual se analiza a continuación.

Proposición 2.2.4 *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión tal que* $a_n \geq 0$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$ *y tal que* $a_n \longrightarrow L$*. Se tiene entonces que* $L \geq 0$ *y que* $\sqrt{a_n} \longrightarrow \sqrt{L}$*.*

Demostración: El hecho que $L \geq 0$ es una consecuencia de la preservación del signo (teorema 2.2.2) pues si $L < 0$ entonces habría una infinidad de números $a_n < 0$, lo cual no es el caso.
El caso $L = 0$ se deja al lector (ver ejercicio 2.2.4) ya que es aplicación directa de la definición, así que se supondrá que $L > 0$. Como siempre, se quiere analizar la diferencia

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}| = \frac{|a_n - L|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}} = \left(\frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}}\right)|a_n - L|.$$

El lado derecho dice cómo se puede proceder: Por el teorema de la preservación del signo se puede encontrar $N \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ de tal forma que $a_n > \delta$ para toda $n \geq N$.

Al sacar raíces y trasladar con $\sqrt{L}$ se obtiene que $\sqrt{a_n} + \sqrt{L} > \sqrt{\delta} + \sqrt{L}$, con lo cual (usando prop. 1.4.4) se tiene

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\delta} + \sqrt{L}}\right) |a_n - L|. \tag{2.2}$$

Ahora bien, dado $\varepsilon > 0$, se puede tomar N aún más grande si es necesario para que también se cumpla que $|a_n - L| < (\sqrt{\delta} + \sqrt{L})\varepsilon$ si $n \geq N$.

Para $n \geq N$ se cumple entonces que

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}| \underset{(2.2)}{\leq} \left(\frac{1}{\sqrt{\delta} + \sqrt{L}}\right) |a_n - L| < \left(\frac{1}{\sqrt{\delta} + \sqrt{L}}\right) (\sqrt{\delta} + \sqrt{L})\varepsilon = \varepsilon.$$

$\square$

En este punto se recomienda al lector resolver los ejercicios del 2.2.2 al 2.2.10 para poner en práctica el uso de las propiedades aritméticas de sucesiones convergentes. A continuación se da un resumen de las propiedades aritméticas vistas en esta sección. Se enunciarán como teorema para hacer referencia a ellas en un futuro, se hará referencia a estas como PA-SC (propiedades aritméticas de sucesiones convergentes).

Teorema 2.2.3 (PA-SC) *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales las cuales son convergentes y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \mu \lim\limits_{n\to\infty} b_n.$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) \left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right).$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (1/b_n) = 1/ \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *siempre que* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0.$

e) $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)/(\lim_{n\to\infty} b_n)$ *siempre* $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

f) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}$ *siempre que* $a_n \geq 0$.

La sección finaliza con un ejemplo de que las PA-SC pueden utilizarse para *adivinar/conjeturar* cuál sería el candidato a límite en caso de que la sucesión sea convergente.

Ejemplo 2.2.3 (Valor de $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$)
Considere la sucesión dada por $a_1 = \sqrt{2}$ *y* $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$. *Si esta sucesión fuera convergente con límite* L, *entonces* $L = 2$. *En efecto, observe primero que* $L \geq 0$ *pues cada* $a_n \geq 0$. *Por PA-SC se tiene de* $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ *que* $L = \sqrt{2+L}$ *y de aquí*

$$0 = L^2 - L - 2 = (L+1)(L-2).$$

Como $L \geq 0$ *se concluye que* $L = 2$.

2.2.1. Ejercicios.

Ejercicio 2.2.1 *Sean* $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \cdots, \mathcal{P}_k$ *ciertas propiedades (por ejemplo* $\mathcal{P}_1$ *puede ser* $|a_n - L| < \varepsilon_1$*). Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- *Para cada* $j = 1, 2, \cdots, k$ *existen constantes* $N_j \in \mathbb{N}$ *tales que* $\mathcal{P}_j$ *es verdadera para toda* $n \geq N_j$.
- *Existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $\mathcal{P}_j$ *es verdadera para toda* $n \geq N$ *y toda* $j = 1, 2 \cdots, k$.

Ejercicio 2.2.2 *Complete el ejemplo 2.2.2 mostrando por inducción que para cualquier* $k \in \mathbb{N}$ *la sucesión* $(1/n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* 0.

Ejercicio 2.2.3 *Utilice la definición para mostrar que*

- $(1/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* 0.
- $\left(\frac{n}{2n+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* $1/2$.

Ejercicio 2.2.4 *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números mayores o iguales a* 0 *y tales que* $a_n \longrightarrow 0$. *Muestre que* $\sqrt{a_n} \longrightarrow 0$.

Ejercicio 2.2.5 *Analice la convergencia de las sucesiones dadas a continuación.*

a) $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$.

b) $(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$.

c) $\left(\frac{2^n}{1+2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

d) $\left(\frac{5^n}{1+5^{2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sugerencia: *En los dos últimos utilice el ejericio 2.1.5.*

Ejercicio 2.2.6 *Sea* $r > 0$. *Demuestre que si la sucesión* $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge entonces necesariamente* $r \leq 1$.
Sugerencia: *Para* $r > 1$ *existe* $\delta > 0$ *con* $r = 1 + \delta$*, use la desigualdad de Bernoulli y el teorema 2.2.1*

Ejercicio 2.2.7 *Sean* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesiones tales que la sucesión de sumas* $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente.*

- *Muestre que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente si y solo si* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *lo es.*
- *Construya un ejemplo donde ambas sucesiones* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sean divergentes.*

Ejercicio 2.2.8 *Sean* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesiones tales que la sucesión de productos* $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente.*

- *Muestre mediante un ejemplo que, contrario al caso de la suma (ejercicio anterior), puede darse que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sea convergente y que* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *no.*

- *Muestre que si* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* $L \neq 0$ *entonces* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es también convergente.*

Ejercicio 2.2.9 *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión que converge a* 0.

- *Muestre que para toda sucesión acotada* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la sucesión* $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* 0.

- *De un ejemplo de una sucesión* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y de una sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergente a* 0 *de tal modo que* $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converja a algo diferente de cero.*

- *Lo mismo que en el punto anterior pero ahora que* $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *no sea convergente.*

Ejercicio 2.2.10 *Construya ejemplos de sucesiones* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *que* no *sean convergentes pero tales que la sucesión de cocientes* $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

a) converja a 1,

b) converja a un $k \neq 0$ *dado,*

c) converja a 0.

Ejercicio 2.2.11 *¿Cuál es el valor de*

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots}}} \quad \text{y de} \quad \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$$

en caso de existir?

Ejercicio 2.2.12 *A continuación se definen dos sucesiones* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *En caso de que estas sean convergentes, encuentre los límites correspondientes.* $a_1 = 1 = b_1$ *y para* $n \in \mathbb{N}$ *se cumplen*

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \quad y \quad b_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+b_n}.$$

2.3. Sucesiones convergentes particulares: Primera parte

El objetivo de esta sección es demostrar que $\sqrt[n]{p} \longrightarrow 1$ para $p > 0$, que $x^n \longrightarrow 0$ si $|x| < 1$ y que también $1 + x + x^2 + \cdots = 1/(1-x)$ en ese mismo caso. Esta última es llamada serie geométrica. Además de ser todas estas muy útiles en la práctica, sus demostraciones son bastante ilustrativas.

Antes de enunciar el teorema, el lector debe revisar el ejercicio 1.5.26 y creer por el momento que las raíces n-ésimas siempre existen para números positivos (ésto se demostrará cuando se haya visto continuidad).

Teorema 2.3.1 *Sea* $p > 0$. *Se tiene que* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

Demostración: La demostración se dividirá en los tres casos de tricotomía: $p = 1$, $p > 1$ y $p < 1$.
Caso 1: $p = 1$. Este caso es trivial pues la sucesión es constante.
Caso 2: $p < 1$. Es posible llevar este caso a el caso cuando $p > 1$ (con lo cual ése sería el único caso interesante) de la siguiente manera: Supongase que el resultado es cierto para cualquier

número mayor a 1. En particular la sucesión $\left(\sqrt[n]{1/p}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 1. Basta ahora observar que

$$\sqrt[n]{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\sqrt[n]{p}} \longrightarrow 1 \neq 0$$

y utilizar PA-SC para concluir que $\sqrt[n]{p} \longrightarrow 1$.

Caso 3: $p > 1$. Observe que $0 \leq \sqrt[n]{p} - 1$ al ser $p > 1$. Ahora bien

$$p = (1 + [\sqrt[n]{p} - 1])^n \underset{\text{Prop. 1.4.8}}{\geq} 1 + n[\sqrt[n]{p} - 1]$$

de donde al trasladar con -1 y dividir entre $n > 0$ se obtiene $\sqrt[n]{p} - 1 \leq (p-1)/n$. Con esto ya se puede trabajar de manera fácil: Dado $\varepsilon > 0$, es posible encontrar $N \in \mathbb{N}$ de tal forma que $1/n < \varepsilon/(p-1)$ siempre que $n \geq N$, pues la sucesión armónica converge a 0. Esta N es la que funciona: Dado $n \geq N$ se tiene

$$|\sqrt[n]{p} - 1| = \sqrt[n]{p} - 1 \leq (p-1)\frac{1}{n} < (p-1)\frac{\varepsilon}{p-1} = \varepsilon.$$

$\square$

Debe enfatizarse que un paso clave para la demostración fue la desigualdad de Bernoulli (proposición 1.4.8).

Teorema 2.3.2 *Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < 1$. Sea $s_n(x) := 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$. Se tienen*

a) ***(Sucesión geométrica)*** *$(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.*

b) ***(Serie geométrica)*** *$(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $1/(1-x)$.*

Demostración: $a)$ El caso $x = 0$ es trivial por lo que solo falta analizar el caso $0 < |x| < 1$. Como $1/|x| > 1$ se puede encontrar $r > 0$ tal que $1/|x| = 1 + r$. Ahora bien

$$\frac{1}{|x|^n} = \left(\frac{1}{|x|}\right)^n = (1+r)^n \underset{\text{Des. Bernoulli}}{\geq} 1 + nr. \tag{2.3}$$

de donde $|x^n| \leq 1/(1+nr)$. Dado ahora $\varepsilon > 0$, como $\mathbb{N}$ no es un conjunto acotado superiormente (propiedad arquimediana) existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(1-\varepsilon)/(r\varepsilon) < N$ (si $\varepsilon \geq 1$ basta $N = 1$). Esta N funcionará: Para $n \geq N$ se tiene (por transitividad) que $(1-\varepsilon)/(r\varepsilon) < n$ y entonces $1-\varepsilon < nr\varepsilon$ de donde al trasladar con ε y dividir entre $1+nr$ se obtiene $1/(1+nr) < \varepsilon$. Con esto se obtiene

$$|x^n - 0| = |x^n| \underset{(2.3)}{\leq} \frac{1}{1+nr} < \varepsilon.$$

$b)$ Basta observar que $(1-x)s_n(x) = 1 - x^{n+1}$ (ver ejercicio 1.3.10) y como $x \neq 1$ se tiene que

$$s_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \longrightarrow \frac{1-0}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

donde se han utilizado PA-SC con a). $\square$

2.3.1. Ejercicios.

Ejercicio 2.3.1 *Encuentre el valor de*

$$1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + \cdots$$

Ejercicio 2.3.2 *Demuestre que* $0.99999\cdots = 1$*, recuerde para esto que se tiene*

$$0.999\cdots := \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots$$

Ejercicio 2.3.3 *Sea* $m \in \mathbb{N}$ *fijo.*

- *Sean* $0 < x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_m \leq 1$*. Demuestre que la sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por*

  $$a_n := \sqrt[n]{1 + x_1^n + x_2^n + \cdots + x_m^n}$$

  converge a 1.

- *Demuestre que para cualesquiera* $y_1, y_1, \cdots, y_m \in \mathbb{R}_+$ *se tiene la igualdad*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{y_1^n + y_2^n + \cdots + y_m^n} = \max\{y_j : 1 \leq j \leq m\}.$$

Sugerencia: *Para la primera parte: el teorema 2.3.1 con* $p = m+1$ *le puede ser muy útil.*

Ejercicio 2.3.4 *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión convergente a* L *y tal que* $a_n \geq 1$ *para toda* n. *Se quiere demostrar que* $(a_n^{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* 1.

- *Demuestre que* $n|\sqrt[n]{a_n} - \sqrt[n]{L}| \leq |a_n - L|$.
- *Utilice lo anterior para mostrar que la sucesión de diferencias* $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *donde* $d_n := \sqrt[n]{a_n} - \sqrt[n]{L}$, *converge a* 0.
- *Concluya con lo anterior que* $(\sqrt[n]{a_n})$ *converge a* 1.
- *¿Qué puede decirse si* $0 < a_n \leq 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $L \neq 0$*?*

Sugerencia: *En el penúltimo punto utilice PA-SC con* $\sqrt[n]{a_n} = d_n + \sqrt[n]{L}$ *y el teorema 2.3.1.*

2.4. Monotonía en sucesiones.

En esta parte se probará que los límites de sucesiones *preservan desigualdades*, se demostrará la llamada ley de estricción y se estudiarán sucesiones que *crecen o decrecen.*

2.4.1. Ley de estricción.

Se comenzará viendo que los límites preservan desigualdades.

Teorema 2.4.1 (Monotonía en el límite) *Sean* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dos sucesiones convergentes. Sea* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $a_n \leq b_n$ *para toda* $n \geq N$*. Se tiene entonces que*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Demostración: Sean $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ y $M = \lim_{n\to\infty} b_n$. Dado que para límites de sucesiones no es importante lo que sucede al principio con la sucesión, puede suponerse que en el enunciado del teorema $N = 1$.
Sea $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión dada por $c_n := b_n - a_n$. Claramente $c_n \geq 0$ y por PA-SC se tiene que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $M - L$. Si se tuviera que $M - L < 0$ entonces por la preservación del signo (corolario 2.2.2) se tendría en particular que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ de tal modo que $c_n < 0$ siempre que $n \geq N_1$, pero esto es obviamente falso pues $c_n \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Se concluye por lo tanto que $M - L \geq 0$, es decir $L \leq M$.
□

Ojo, puede ser que se tenga $a_n < b_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y sin embargo que $L = M$, es decir, lo *estricto* de las desigualdades no se mantiene en el límite. El siguiente es un ejemplo de esto.

Ejemplo 2.4.1 *Para* $a_n = 1/n$ *y* $b_n = 2/n$ *claramente se tiene que* $a_n < b_n$ *y en el límite*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Un resultado similar al anterior es el siguiente, debe observarse sin embargo que en el teorema de monotonía en el límite ya se sabe que los límites involucrados existen.

Teorema 2.4.2 (Ley de estricción) *Sean* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesiones dadas y tales que* *a)* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$ *y*

b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergen ambas a un mismo número* $L \in \mathbb{R}$.

Se tiene entonces que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es también convergente y de hecho* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

Demostración: Observe primero que si ya se supiera que existe $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ entonces, por el teorema de monotonía al límite (teorema 2.4.1), claramente se cumpliría $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$, según $a)$ y la tricotomía de $\mathbb{R}$. Basta entonces demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ existe.
La sucesión de diferencias $(c_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 según las PA-SC. Ahora bien, con esto y el hecho que $0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n$, se demostrará que la sucesión $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0. Sea $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ de tal modo que $|c_n - a_n - 0| < \varepsilon$ si $n \geq N$. Para $n \geq N$ se tiene entonces

$$|b_n - a_n - 0| = b_n - a_n \leq c_n - a_n = |c_n - a_n - 0| < \varepsilon$$

lo cual muestra que efectivamente $b_n - a_n \longrightarrow 0$. Para concluir la prueba de que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente basta ahora ver que esta sucesión es suma de sucesiones convergentes pues

$$b_n = a_n + (b_n - a_n),$$

se utilza obviamente PA-SC. $\square$

La ley de estricción es una herremienta muy útil para demostrar ciertos límites.

Ejemplo 2.4.2 *Sea* $c > 0$ *una constante dada. Si se define la sucesión* $a_n := 1/(n^2 + c)$, *se tiene que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* 0. *Para ver esto basta observar que* $0 \leq a_n \leq 1/n$ *y aplicar la ley de estricción.*

2.4.2. Sucesiones monótonas

Nuevamente usando el hecho de que lo interesante de una sucesión es lo que pasa *al final* y no *al principio*, se dará por definición de monotonía lo que en otros textos se suele llamar *eventualmente monótona.*

Definición 2.4.1 *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión dada.*
Se dice que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es*

- monótona creciente *si existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $a_n \leq a_{n+1}$ *para toda* $n \geq N$.

- monótona decreciente *si existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $a_n \geq a_{n+1}$ *para toda* $n \geq N$.

- monótona *si es monótona creciente o decreciente.*

- acotada superiormente *(respectivamete* inferiormente*) si el conjunto asociado* $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *es acotado superiormente (respectivamente* inferiormente*).*

En la definición 2.2.1 se ha dado el concepto de sucesión acotada (a secas). Si una sucesión es acotada entonces claramente es acotada superiormente e inferiormente. El regreso tambíen es cierto (ver ejercicio 2.4.7).

Teorema 2.4.3 (Teorema de Weierstrass) *Toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente es convergente. Del mismo modo, toda sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente es convergente.*

Demostración: Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona creciente y acotada superiormente. Para demostrar la convergencia se requerirá primero tener a mano el candidato a límite. Para esto sea $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Existe $L = \sup(A)$ pues A es un conjunto acotado superiormente y no vacío.
Se afirma ahora que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. Para ver esto sea $\varepsilon > 0$. De la proposición 1.5.4 se sabe que existe $N \in \mathbb{N}$ de tal modo que $L - \varepsilon < a_N \leq L$. Ahora bien, para $n \geq N$ se tiene, usando la monotonía, que

$$L - \varepsilon < a_N \leq a_{N+1} \leq \cdots \leq a_n \leq L < L + \varepsilon$$

lo cual implica que $|a_n - L| < \varepsilon$. Esto muestra que $a_n \longrightarrow L$.
El caso en que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona decreciente y acotada inferiormente se puede reducir al caso anterior de la siguiente manera: El conjunto $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado inferiormente con $L = \inf(A)$. La sucesión $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada superiormente con límite $\sup(\ominus A) = -\inf(A) = -L$ (compare con el ejercicio 1.5.11). Basta ahora usar $-a_n \longrightarrow -L$ con PA-SC para concluir $a_n \longrightarrow L$. $\square$

La demostración del teorema anterior muestra de hecho quiénes son los límites en cada caso, a saber, el supremo y el ínfimo respectivamente; saber esto resulta útil en algunos casos.

A continuación se dará una aplicación del teorema de Weierstrass (teorema 2.4.3) para demostrar la existencia de raíces k-ésimas en general. Es importante observar que al final del capítulo 1 se dejaron de ejercicio algunas propiedades de raíces k-ésimas *bajo el supuesto* que dichas raíces existían.

Lema 2.4.1 *Sea $k \geq 2$ entero y sea $a > 0$ un número real dado. Se define la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de manera recursiva mediante $b_1 = a$ y*

$$b_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)b_n + \frac{a}{b_n^{k-1}}\right).$$

Se tiene entonces que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Demostración: Se demostrará esta afirmación utilizando el teorema de Weierstrass (teorema 2.4.3), es decir, se mostrará que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona decreciente y acotada inferiormente.
$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada inferiormente por 0: Por hipótesis $b_1 = a > 0$. Si ahora se supone (por inducción) que $b_n > 0$ entonces de

$$b_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)b_n + \frac{a}{b_n^{k-1}}\right)$$

y los axiomas de cerradura de positivos (ambos, de suma y producto) se tiene claramente que $b_{n+1} > 0$. Por lo tanto 0 es cota inferior de la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona decreciente: Para ver esto conviene reescribir b_{n+1} de la siguiente forma

$$b_{n+1} = b_n\left[1 + \frac{1}{k}\left(\frac{a}{b_n^k} - 1\right)\right]. \tag{2.4}$$

b_{n+1} tiene en efecto esta forma:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{k}\left[(k-1)b_n + \frac{a}{b_n^{k-1}}\right] = b_n\frac{1}{k}\left[(k-1) + \frac{a}{b_n^k}\right] \\ &= b_n\left[1 - \frac{1}{k} + \frac{a}{k(b_n^k)}\right] = b_n\left[1 + \frac{1}{k}\left(\frac{a}{b_n^k} - 1\right)\right]. \end{aligned}$$

Con esto es más claro cómo aplicar la desigualdad de Bernoulli:

$$b_{n+1}^k = b_n^k\left[1 + \frac{1}{k}\left(\frac{a}{b_n^k} - 1\right)\right]^k \geq b_n^k\left[1 + \left(\frac{a}{b_n^k} - 1\right)\right] = a.$$

Se ha demostrado en particular que $b_n^k \geq a$ para todo $n \geq 2$. Que se haya podido usar la desigualdad de Bernoulli se justifica del hecho que al tenerse $a/b_n^k - 1 > -1$ se obtiene

$$\frac{1}{k}\left(\frac{a}{b_n^k} - 1\right) > -\frac{1}{k} > -1$$

la última desigualdad se da por tenerse $k \geq 2$. Ahora bien, si $n \geq 2$ se tiene que $b_n^k \geq a$ para concluir la monotonía: Para $n \geq 2$ se tiene que $1 \geq a/b_n^k$, de donde $(1/k)\left(\frac{a}{b_n^k} - 1\right) \leq 0$ y usando ahora (2.4) se concluye que

$$b_{n+1} \leq b_n[1 + 0] = b_n.$$

Con esto se termina la prueba de que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona decreciente.

□

Teorema 2.4.4 (Existencia y unicidad de raíces positivas) *Sea $k \geq 2$ un entero y sea $a > 0$ un número real. Existe entonces una única raíz k-ésima positiva para a, es decir un número real $b > 0$ de tal modo que $b^k = a$.*

Demostración: Sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión del lema anterior. Se tiene que existe el límite $b := \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ y como $b_n > 0$ para toda n se tiene $b \geq 0$ por la monotonía al límite. Ahora bien, de $b_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)b_n + \frac{a}{b_n^{k-1}}\right)$ se obtiene, al multiplicar por kb_n^{k-1}, que $kb_n^{k-1}b_{n+1} = (k-1)b_n^k + a$. Con esto

$$kb^k = kb^{k-1}b \underset{\text{PA-SC}}{=} (k-1)b^k + a$$

de donde $b^k = a$. Claramente con esto se excluye el caso $b = 0$ y así $b > 0$. Esto termina la prueba de la existencia de la raíz positiva. La unicidad es trivial del hecho que si $0 < b < c$ entonces $b^k < c^k$.

□

Corolario 2.4.1 *Sea $k \geq 2$ un entero y sea $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ arbitrario.*

a) Si k es par y $a > 0$ existe $b > 0$ de tal modo que tanto b como $-b$ son raíces k-ésimas de a.

b) Si k es impar entonces siempre existe $b \in \mathbb{R}$ con $b^k = a$ y además $ab > 0$ (i.e del mismo signo).

Demostración: $a)$ Sea $b > 0$ como en el teorema anterior. Se tiene que $k = 2m$ con $m \in \mathbb{N}$, con esto

$$(-b)^k = (-b)^{2m} = [(-b)^2]^m = [b^2]^m = b^{2m} = b^k = a$$

y así también $-b$ es raíz k-ésima de a.
$b)$ Para k impar, sea $a' := |a| > 0$. Nuevamente del teorema anterior existe $b_1 > 0$ con $b_1^k = a' = |a|$. Se define ahora b como b_1 si $a > 0$ y como $-b_1$ si $a < 0$, con esto $ab > 0$. Es claro que en el caso $a > 0$, $b^k = a' = |a| = a$. Para el caso $a < 0$

$$b^k = (-b_1)^k = (-1)^k (b_1)^k \underset{k \text{ impar}}{=} -b_1^k = -|a| = -(-a) = a.$$

En ambos casos $a > 0$ y $a < 0$ se puede encontrar la raíz buscada.

$\square$

Para el caso de raíces cuadradas habíamos visto una prueba usando ínfimos y supremos (vea el ejercicio 1.5.23), ahora que ya se han manejado los conceptos de sucesiones (y se tiene otra prueba), recomendamos que el lector vea una tercera opción de la existencia de $\sqrt{2}$ usando que la sucesión armónica $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero (propiedad arquimediana); esta la puede encontrar en el libro de Abbott [1, Theorem 1.4.5].

2.4.3. Ejercicios.

Ejercicio 2.4.1 *Utilice el ejercicio 1.4.28 para demostrar que*

$$\sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Con lo anterior y con la ley de estricción concluya ahora que la sucesión $(\sqrt[n]{n})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* 1.

Ejercicio 2.4.2 *Muestre que la sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por* $a_n = (3n-1)/(4n+5)$ *es monótona creciente.*

Sugerencia: *Analice los cocientes* a_{n+1}/a_n.

Ejercicio 2.4.3 *¿Es la sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por* $a_n = (n+6)/(4n+5)$ *monótona?*

Ejercicio 2.4.4 *Considere la sucesión dada por* $a_n = n/3^{n+1}$.

- *Argumente que* $a_{n+1}/a_n \longrightarrow 1/3$.
- *Usando* $\varepsilon = 1/3$ *en la definición de convergencia demuestre que existe* $N \in \mathbb{N}$ *de tal modo que* $a_{n+1}/a_n < 2/3$ *para toda* $n \geq N$.
- *Demuestre que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es monótona decreciente.*
- *Concluya que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente.*

Ejercicio 2.4.5 *Sea* $0 < k < 1$ *una constante dada. Suponga que la sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *satisface que para toda* $n \in \mathbb{N}$ *se cumple* $0 \leq a_{n+1} \leq ka_n$. *Demuestre que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente y calcule su límite.*

Sugerencia: *¿Quién tiene que ser el límite si existe?*

Ejercicio 2.4.6 *Sea $0 < r < 1$ dada y considere la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $a_n = nr^n$. Demuestre las siguientes afirmaciones.*

- $(a_{n+1}/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente.*
- *Existen $0 < k < 1$ y $N \in \mathbb{N}$ de tal forma que si $n \geq N$ entonces $a_{n+1} < ka_n$.*
- $(nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a 0.*

Ejercicio 2.4.7 *Muestre que una sucesión es acotada si y solo si es acotada superior e inferiormente.*

Ejercicio 2.4.8 *Ahora es turno de completar el ejercicio 2.2.11. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$. Demuestre que*

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es acotada superiormente por 2,*
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es monótona creciente.*

Concluya que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente e indique el valor del límite.

Ejercicio 2.4.9 *Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea*

$$a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

- *Muestre que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente y*
- *acotada superiormente, por lo que es convergente.*

El límite de esta sucesión es denotado $\zeta(2)$ y será calculado más adelante.

Sugerencia: *Para el segundo punto demuestre primero que para $k \geq 2$ se tiene $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.*

Ejercicio 2.4.10 *Considere la sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por* $a_n = 5^n/(1+5^{2n})$. *Demuestre que esta sucesión es monótona decreciente y convergente.*

Sugerencia: *Para la monotonía analice* a_{n+1}/a_n *y el ejercicio 1.4.16.*

Ejercicio 2.4.11 *Considere la sucesión de sumas* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por*

$$s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1}.$$

Demuestre cada una de las siguientes afirmaciones.

- *Para cada* $n \geq 2$ *se tiene que* $s_n - s_{n-1} > 0$.
- $s_n < 2$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$.
- $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente.*

Sugerencia: *Para el segundo punto conviene (técnica usual en estos casos)* refinar *la desigualdad y demostrar que de hecho* $s_n < 2 - \frac{1}{n}$ *para toda* $n \geq 2$.

Ejercicio 2.4.12 *Considere la sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por*

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Demuestre que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente.*

Ejercicio 2.4.13 $\left(\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}}\right)$ *Considere la sucesión definida mediante* $a_1 = \sqrt{2}$ *y* $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$. *Demuestre que:*

- $a_n < 2$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$.
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente. Encuentre el límite correspondiente.*

Ejercicio 2.4.14 *Considere la sucesión dada por* $a_1 = 2$ *y* $a_{n+1} = \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{a_n}}}$. *Demuestre que* $1 \leq a_n \leq 3$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$ *y que la sucesión es convergente.*
Utilice lo anterior para hallar el valor de

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{2\cdots}}}}}$$

Sugerencia: *Analice la monotonía mediante las diferencias* $a_{n+1}^2 - a_n^2$ *(vea el ejercicio 1.5.25).*

Ejercicio 2.4.15 (Teorema de intervalos cerrados anidados) *Sea* $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una familia de intervalos cerrados y anidados descendentemente, esto es, tales que* $I_{n+1} \subset I_n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *Demuestre que* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.
Sugerencia: *Si* $I_n = [a_n, b_n]$ *demuestre primero que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergen, sean* L *y* M *los límites respectivos. Muestre entonces que* $L \leq M$ *y que* $[L, M] \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

2.5. Sucesiones convergentes particulares: Segunda parte

Una de las sucesiones particulares más importantes son las relacionadas con la exponencial y el número e. Se comenzará dando un repasando la construcción del número e.

2.5.1. El número e.

Un punto clave en la construcción del número e es el siguiente el cual se basa en la siguiente observación: Para cada $n \in \mathbb{N}$ se vale

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(1-\frac{n-1}{n^2}\right) > 1\,. \tag{2.5}$$

Esto es fácil de ser verificado: $(n-1)(n+1) = n^2 - 1 < n^2$ así que al dividir esta desigualdad por el positivo $n^2(n+1)$ se obtiene que $(n-1)/n^2 < 1/(n+1)$ de donde al reflejar y trasladar con 1 se obtiene

$$1 - (n-1)/n^2 > 1 - 1/(n+1)\,.$$

Para terminar, basta dividir la desigualdad anterior por el positivo $n/(n+1) = 1 - 1/(n+1)$.

Lema 2.5.1 *La sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por* $a_n = (1+1/n)^n$ *es monótona creciente.*

Demostración: Se quiere demostrar que $a_{n-1} < a_n$. Una manera de atacar esto es considerando los cocientes a_n/a_{n-1} y mostrando que son mayores a 1 (esto está usando que $a_n \geq 0$ para toda n). Ahora bien

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-1}} &= a_n\left(\frac{1}{a_{n-1}}\right) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)\left[\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\right]^{n-1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)\left[1-\frac{1}{n^2}\right]^{n-1} \\
&\underset{\text{Des. Bernoulli}}{\geq} \left(\frac{n+1}{n}\right)\left[1-\frac{n-1}{n^2}\right] \underset{(2.5)}{>} 1\,.
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.5.1 (El número e) *La sucesión* $a_n = (1+1/n)^n$ *es convergente. El límite es llamado el* número de Euler $e := \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$, *de hecho* $2 < e \leq 3$.

Demostración: El lema anterior muestra que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente, para mostrar la convergencia basta entonces demostrar, según el teorema 2.4.3, que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada superiormente. Esto es consecuencia de los ejercicios 1.4.29 y 1.4.30 los cuales muestran (por transitividad) que $a_n < 3$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Hasta aquí se tiene que existe el límite $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n$ y que de hecho $e \leq 3$ por la monotonía al límite (teorema 2.4.1).
Que $e \geq 2$ se sigue de

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{\text{Des. Bernoulli}}{\geq} 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2,$$

por último $2 = a_1 < a_2 \leq \sup(\{a_n : n \in \mathbb{N}\}) = e$ y así $2 < e$. Se ha utilizado en este caso que el límite e es justamente un supremo (ver comentarios después del teorema 2.4.3). $\square$

Se tiene otra manera importante de ver al número e.

Teorema 2.5.2 *Sea* $b_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. *Se tiene entonces que* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* e.

Demostración: Sea $a_n = (1 + 1/n)^n$. De los ejercicios 1.4.29 y 1.4.30 se sabe que $a_n \leq b_n < 3$ para toda $n \in \mathbb{N}$; por lo tanto, si el límite $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ existiera entonces éste cumpliría, según la monotonía al límite, que $e \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Para mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ existe, se demostrará que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente y acotada superiormente por e. Ésto mostrará tanto que el límite existe como que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \leq e$, con lo que, por tricotomía, se podrá concluir que dicho límite es precisamente e.
$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente. Ésto es claro al ser suma de términos positivos: $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ de donde se sigue que $b_{n+1} > b_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Para ver que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada superiormente por e se utilizará la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de apoyo y ciertas manipulaciones algebraicas.

$$\begin{aligned}
a_n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot\frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot\frac{n(n-1)\cdots 1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)
\end{aligned}$$

El paso clave viene a continuación. Sea $m \in \mathbb{N}$ fijo. Para cualquier $n \geq m$ se cumple, por lo anterior, que

$$a_n \geq 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right).$$

Como esta desigualdad se cumple para toda $n \geq m$, se tiene que al tomar límite cuando $n \to \infty$ (la m se ha fijado, así que la cantidad de sumandos del lado derecho no cambia), por las PA-SC, que

$$e \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!} = b_m.$$

Esto muestra que (al ser m arbitrario) $e \geq b_m$ para toda $m \in \mathbb{N}$, es decir, e es una cota superior para $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Esto concluye la demostración del teorema.

$\square$

2.5.2. El límite de $n(a^{1/n} - 1)$.

Para estudiar este límite será útil recordar primero algo de la notación de exponentes. Para cualquier número $a \in \mathbb{R}$ se tiene definido ya a^n, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Si $a \neq 0$ se tiene definido también a^n para cualquier $n \in \mathbb{Z}$; de hecho conocemos cómo funcionan las leyes de los exponentes (prop. 1.3.10).

¿Qué pasa si el exponente es racional? Se han definido en el capítulo 1 raíces n-ésimas de números positivos en general, con esto, si $a > 0$ se puede definir $a^{1/n} := \sqrt[n]{a}$. El inciso $f)$ del ejercicio 1.5.27 muestra que se puede definir $a^{n/m}$ como el valor común $\sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n$ y con esto se entiende el significado de a^r, para cualquier $r \in \mathbb{Q}$ positivo. Por supuesto $a^{-r} := (a^r)^{-1}$.

Proposición 2.5.1 *Para $r \in \mathbb{Q}$ y $a > 0$, el valor de a^r no depende de la representación del racional r como cociente de enteros.*

Demostración: Sean $n, m, n', m' \in \mathbb{Z}$ de tal forma que $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} = r$. Sean $x = (a^m)^{1/n}$ y $y = (a^{m'})^{1/n'}$, se quiere demostrar que $x = y$. De la igualdad de fracciones se tiene que $n'm = m'n$ y por lo tanto, usando leyes de exponentes enteros (prop. 1.3.10) y definición de raíces, que

$$x^{nn'} = [(a^m)^{1/n}]^{nn'} = \left([(a^m)^{1/n}]^n\right)^{n'} = (a^m)^{n'} = a^{mn'}.$$

Del mismo modo se muestra que $y^{n'n} = a^{nm'}$, con lo cual se concluye que

$$x^{nn'} = a^{mn'} \underset{(mn'=m'n)}{=\!=\!=\!=} a^{m'n} = y^{n'n}.$$

Se tiene entonces que x, y son ambas raíces (nn')-ésimas no negativas del valor común $x^{nn'}$, con lo cual deben coincidir, es decir $x = y$.

$\square$

Es un ejercicio sencillo (de leyes de exponentes de enteros y raíces) el verificar que se valen las leyes de exponentes que se enuncian a continuación, por lo que dejamos la prueba al lector.

Proposición 2.5.2 ***(Leyes de exponentes racionales)***
Sean $x, y \in \mathbb{R}$*,* $x, y > 0$ *y sean* $r, s \in \mathbb{Q}$*. Se valen cada una de las siguientes afirmaciones.*

a) $x^r x^s = x^{r+s}$.

b) $(x^r)^s = x^{rs}$.

c) $x^r y^r = (xy)^r$.

d) $\frac{x^r}{x^s} = x^{r-s}$.

e) $x^r = 1/x^{-r}$.

Se sugiere en éste punto que el lector demuestre algunos casos del enunciado anterior. Puede empezar con el caso r y s positivos y puede suporer (según la proposición anterior) ambos números con el mismo denominador.

Ahora sí, se tienen las condiciones para poder demostrar que existe el límite indicado en el título de esta sección. El valor exacto de este límite se estudiará más adelante.

Teorema 2.5.3 *Sea* $a > 1$*. La sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por* $a_n = n(a^{1/n} - 1)$ *es convergente. El límite se denotará por* L_a*.*

Demostración: Como $a > 1$ se tiene que $a^{1/n} > 1$ y así $a_n > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es decir la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada inferiormente. Para ver la convergencia bastará ahora demostrar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona decreciente.
Sea $n \in \mathbb{N}$, se mostrará que $a_n - a_{n+1} > 0$. Para facilitar la prueba se introduce $b := a^{\frac{1}{n(n+1)}}$ (que tiene el sentido de exponentes racionales que se ha discutido).

Debe observarse que $b^n = a^{\frac{1}{n+1}}$ y $b^{n+1} = a^{\frac{1}{n}}$, con esto:

$$\begin{aligned}
a_n - a_{n+1} &= n(b^{n+1} - 1) - (n+1)(b^n - 1) = n(b^{n+1} - b^n) - (b^n - 1) \\
&= nb^n(b-1) - (b^n - 1) \\
&= nb^n(b-1) - (b-1)(1 + b + \cdots + b^{n-1}) \\
&= (b-1)[nb^n - 1 - b - \cdots - b^{n-1}] \\
&= (b-1)[(b^n - 1) + (b^n - b) + \cdots + (b^n - b^{n-1})]
\end{aligned}$$

Ahora bien, la última expresión es positiva pues $b > 1$ y así

$$b^m > b^{m-1} > \cdots > b > 1$$

con lo cual cada sumando del factor derecho es también positivo; la conclusión es que $a_n - a_{n+1} > 0$. □

Ejercicio 2.5.1 *Usando la notación del teorema 2.5.3 muestre que para* $0 < a < 1$ *se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} n(a^{1/n} - 1) = -L_{1/a}.$$

2.6. Subsucesiones y sucesiones de Cauchy.

Es posible estudiar convergencia o divergencia de sucesiones mediante el comportamieto de sus subsucesiones. Se comenzará esta sección con los elementos básicos de subsucesiones.

2.6.1. Subsucesiones y el teorema de Bolzano-Weierstrass

A continuación se tiene una definición muy importante a la hora de estudiar la estructura de las sucesiones.

Definición 2.6.1 *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión dada. Considere una sucesión creciente de números naturales* $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. *Una sucesión del tipo* $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *es llamada subsucesión de* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si se toma $n_k = k$, para todo natural $k \in \mathbb{N}$, se puede ver claramente que toda sucesión es subsucesión de sí misma. En el ejercicio 2.1.8 ya se ha tenido contacto con subsucesiones particulares. De hecho, el resultado de dicho ejercicio se puede generalizar a la siguiente proposición, la cual resulta muy útil a la hora de probar divergencia.

Proposición 2.6.1 *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión dada y* $L \in \mathbb{R}$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* L.

b) Toda subsucesión de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* L.

Demostración: $b) \Rightarrow a)$ es trivial pues toda sucesión es subsucesión de sí misma.
Para ver que $a) \Rightarrow b)$ sea $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de la sucesión dada. Se quiere demostrar que $a_{n_k} \longrightarrow L$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $a_n \longrightarrow L$ existe $N \in \mathbb{N}$ de tal forma que si $n \geq N$ entonces $|a_n - L| < \varepsilon$. Ahora bien, el paso clave está en observar que $n_k \geq k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (verifique esto, usando inducción por ejemplo). Se tiene entonces para $k \geq N$ que $n_k \geq k \geq N$ y por lo tanto $|a_{n_k} - L| < \varepsilon$.
□

La observación en la prueba anterior de que $n_k \geq k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ resulta útil algunas veces. Una manera de utilizar la proposición anterior en la práctica es encontrando subsucesiones que converjan a diferentes valores para poder concluir que la sucesión original no es convergente.

Ejemplo 2.6.1 *La sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por* $a_n = (-1)^n + (-1)^{n+1}/n$ *no es convergente. Considere las subsucesiones* $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ *y* $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$*. Usando PA-SC se puede ver que*

$$a_{2k} \longrightarrow 1 + 0 = 1\,,$$
$$a_{2k+1} \longrightarrow -1 + 0 = -1.$$

Si la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *fuera convergente a* L *entonces por la proposición 2.6.1 y de lo anterior debería de tenerse que* $1 = L = -1$*, lo cual es absurdo.*

También se puede utilizar la proposición 2.6.1 para encontrar el límite de algunas sucesiones, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.6.2 *La sucesión dada por* $x_n = (1 + 1/(2n))^n$ *converge al valor* $\sqrt{e}$*. En efecto, considere la sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *del teorema 2.5.1; como ésta converge al número* e *así lo hacen todas sus subsucesiones, en particular* $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$*. Ahora bien, observe que* $x_n = \sqrt{a_{2n}}$ *así que de las PA-SC se concluye que* $x_n \longrightarrow \sqrt{e}$*.*

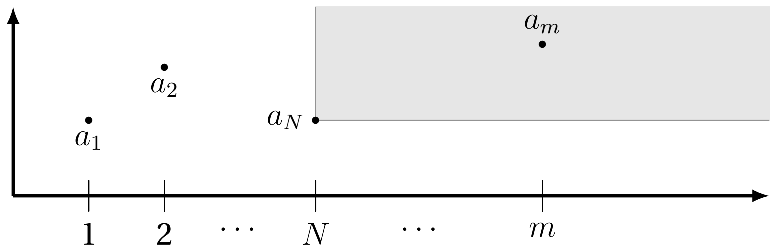
Uno de los teoremas importantes en el tema de subsucesiones es el teorema de Bolzano-Weierstrass. Antes de enunciarlo damos un resultado técnico.

Lema 2.6.1 *Sea* $(a_n)_{\in\mathbb{N}}$ *una sucesión dada. Si* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *no posee subsucesiones monótonas crecientes entonces posee al menos una subsucesión monótona decreciente. Un resultado análogo se tiene al intercambiar de lugar las palabras* decreciente *y* creciente.

Demostración: Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que no posee subsucesiones crecientes. Sea B el conjunto descrito a continuación

$$B := \{N \in \mathbb{N} : a_N \leq a_m \forall m \geq N\}.$$

Un elemento $N \in B$ es tal que a_N es elemento mínimo de la *cola* de la sucesión. Gráficamente (representando sucesiones en $\mathbb{R}^2$) se puede decir que $N \in B$ si toda la sucesión despúes de N está en la zona gris del dibujo siguiente



La letra B se eligió para la notación pues sus elementos son los puntos *más bajos de cada cola* de la sucesión. Por la definición de B, se tiene que si $n_1 < n_2$ son elementos de B entonces $a_{n_1} \leq a_{n_2}$, esta observación es clave para probar la afirmación siguiente: No puede existir una cantidad infinita de elementos en B, en efecto, si $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ estuvieran todos en B entonces se tendría que $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión monótona creciente, lo cual no puede existir por hipótesis.

Ahora bien, como el conjunto B es finito (puede ser vacío) se puede tomar $N \in \mathbb{N}$ de tal modo que si $n \geq N$ entonces $n \notin B$. A continuación se va a describir cómo encontrar una sucesión monótona decreciente. Sea $n_1 = N$, como $n_1 \notin B$ existe $n_2 > n_1$ de tal forma que $a_{n_2} < a_{n_1}$. Nuevamente, como $n_2 \notin B$ (pues $n_2 > N$) existe $n_3 > n_2$ de tal forma que $a_{n_3} < a_{n_2}$. Continuando de este modo inductivo, se obtienen naturales $n_1 < n_2 < \cdots$ tales que la subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es monótona decreciente.

$\square$

Una manera de reescribir el lema anterior es la siguiente:

Toda sucesión de números reales posee una subsucesión monótona.

Se ha visto que toda sucesión monótona acotada es convergente (teorema 2.4.3), así que aplicando este resultado a subsucesiones monótonas (que existen por el lema previo), se puede demostrar el teorema de Bolzano-Weierstrass.

Teorema 2.6.1 (Bolzano-Weierstrass) *Toda sucesión acotada de números reales posee una subsucesión convergente.*

2.6.2. Sucesiones de Cauchy.

Las sucesiones de Cauchy son sucesiones de un cierto tipo, que permiten analizar la convergencia sin necesidad de tener a mano el límite al que la sucesión converge. No en todo *espacio* las sucesiones de Cauchy son convergentes como en $\mathbb{R}$, en $\mathbb{R}$ sin embargo la equivalencia se tiene y es muy útil.

Definición 2.6.2 *Se dice que una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ de tal modo que para cualesquiera $n, m \geq N$ se tiene $|a_n - a_m| < \varepsilon$.*

A continuación un ejemplo.

Ejemplo 2.6.3 *Sea* $a_n := \frac{n^2+1}{n^2}$. *La sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es de Cauchy. Para ver esto, se deben estudiar las diferencias* $|a_n - a_m|$. *Sea* $n \geq m$,

$$\begin{aligned}|a_n - a_m| &= \left|\frac{n^2+1}{n^2} - \frac{m^2+1}{m^2}\right| \\ &= \left|\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right| \overset{n\geq m}{=\!=} \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{m^2} \leq \frac{1}{m}.\end{aligned}$$

Lo anterior da la idea de como elegir la N: *Dado* $\varepsilon > 0$ *sea* $N \in \mathbb{N}$ *de tal modo que* $1/N < \varepsilon$ *(existe por la propiedad arquimediana). Así para* $n \geq m \geq N$ *se tiene*

$$|a_n - a_m| \leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

con lo cual la sucesión es de Cauchy.

El siguiente resultado da más ejemplos de sucesiones de Cauchy.

Proposición 2.6.2 *Si una sucesión es convergente entonces es de Cauchy.*

Demostración: Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a L; para ver que esta sucesión es de Cauchy sea $\varepsilon > 0$. Como $a_n \longrightarrow L$ existe $N \in \mathbb{N}$ de tal modo que si $n \geq N$ entonces $|a_n - L| < \varepsilon/2$. Esta N funciona: Sean $n, m \geq N$, se tiene

$$|a_n - a_m| \leq |(a_n - L) - (a_m - L)| \leq |a_n - L| + |a_m - L| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

$\square$

Se tiene a continuación el siguiente lema, el cual es muy útil.

Lema 2.6.2 *Si una sucesión de Cauchy posee una subsucesión convergente entonces ella misma es convergente y de hecho converge al mismo límite.*

Demostración: Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy la cual posee la subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a L. Se va a ver que $a_n \longrightarrow L$. Sea $\varepsilon > 0$, de la condición de convergencia de $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ y de la de Cauchy de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es posible encontrar $N' \in \mathbb{N}$ de tal modo que si $n, m, k \geq N'$ entonces

$$|a_n - a_m| < \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad |a_{n_k} - L| < \varepsilon/2.$$

Esta $N := n_{N'}$ funciona para la convergencia: Sea $n \geq N$, así $n \geq n_{N'} \geq N'$ y por tanto

$$\begin{aligned} |a_n - L| &= |(a_n - a_{n_{N'}}) + (a_{n_{N'}} - L)| \\ &\leq |a_n - a_{n_{N'}}| + |a_{n_{N'}} - L| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Ahora se verá que en $\mathbb{R}$ vale el regreso de la proposición 2.6.2 y por tanto que el ser sucesión de Cauchy es equivalente a ser sucesión convergente.

Teorema 2.6.2 (Completez de $\mathbb{R}$) *Toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ es convergente.*

Demostración: Por el lema 2.6.2 bastará mostrar que toda sucesión de Cauchy posee una subsucesión convergente. Para probar esto, bastará a su vez utilizar el teorema de Bolzano-Weierstrass (teorema 2.6.1), mostrando que toda sucesión de Cauchy es acotada. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. Para $1 > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ de tal modo que $|a_n - a_m| < 1$ siempre que $n, m \geq N$. En particular para $n \geq N$ se tiene

$$|a_n| = |(a_n - a_N) + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|.$$

Se concluye entonces que $|a_n| < 1 + \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|\}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, es decir, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$es acotada. $\square$

Debe observarse que el teorema anterior utilizó en su demostración el hecho clave de que una sucesión monótona acotada es convergente (teorema 2.4.3), resultado que a su vez depende de la existencia de ínfimos y supremos (el límite es o ínfimo o un supremo), es decir, se requiere el axioma de completez. Dicho en otras palabras el teorema de completez de $\mathbb{R}$ requiere el axioma de completez. De hecho ambos enunciados son equivalentes y de allá el nombre común. Para ver la equivalencia faltaría demostrar que si vale el teorema 2.6.2 entonces debe valer también el axioma de completez.

Se empezará por ver que se puede recuperar el teorema 2.4.3 suponiendo que toda sucesión de Cauchy converge. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona creciente y acotada superiormente por M (el caso decreciente es análogo).

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no fuera de Cauchy entonces existiría $\varepsilon_0 > 0$ de tal modo que para toda $N \in \mathbb{N}$ es posible encontrar $n, m \geq N$ tales que $|a_n - a_m| \geq \varepsilon_0$.

Tomando $N = 1$ en lo anterior se pueden encontrar $n_2 > n_1 \geq 1$ tales que $|a_{n_2} - a_{n_1}| \geq \varepsilon_0$. Tomando ahora $N = n_2$ es posible encontrar $n_3 > n_3' \geq N$ tales que $|a_{n_3'} - a_{n_3}| \geq \varepsilon_0$. Continuando inductivamente, al tomar $N = n_k$, es posible encontrar $n_{k+1} > n_{k+1}' \geq N$ de tal modo que $|a_{n_{k+1}'} - a_{n_{k+1}}| \geq \varepsilon_0$. Observe que la construcción produce enteros $n_1 < n_2 < \cdots$ y como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente entonces

$$a_{n_k} = a_{n_k} - a_{n'_k} + a_{n'_k} = |a_{n_k} - a_{n'_k}| + a_{n'_k} \geq \varepsilon_0 + a_{n'_k} \geq \varepsilon_0 + a_{n_{k-1}} \, ,$$

usando ahora $a_{n_k} \geq \varepsilon_0 + a_{n_{k-1}}$ recursivamente se llega a $a_{n_k} \geq (k-1)\varepsilon_0 + a_{n_1}$, $n_1 = 1$. Usando ahora la propiedad arquimediana (que no depende del axioma de completez) se puede encontrar $k \in \mathbb{N}$ de tal modo que $k - 1 > (M - a_1)/\varepsilon_0$ con lo cual se tendría que $a_{n_k} > M$, contradiciendo así el que M sea cota superior. La conclusión es entonces que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ debe ser de Cauchy y por tanto convergente.

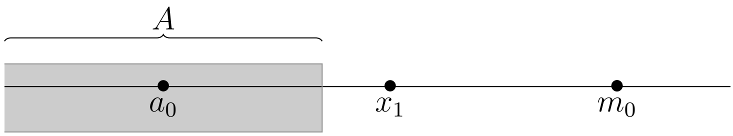
Se concluye entonces que el teorema 2.4.3 se puede deducir de modo independiente suponiendo cualquiera de las dos versiones de completez.

Proposición 2.6.3 *El axioma de completez y el teorema de completez de* $\mathbb{R}$ *(teorema 2.6.2) son equivalentes.*

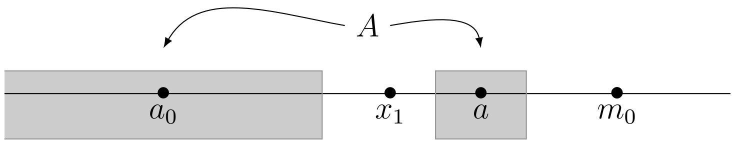
Demostración: De la discusión previa solo hace falta demostrar que si toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ converge entonces todo conjunto no vacío y acotado superiormente posee un supremo.
Sea entonces $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ un conjunto que tiene por cota superior $M \in \mathbb{R}$. Como A contiene a alguna cota superior entonces posee un supremo según el ejercicio 1.5.2. Se supondrá por tanto que A no contiene a ninguna de sus cotas superiores.
Se construirá ahora una sucesión creciente de elementos de A y una sucesión decreciente de cotas superiores de A que converjan a un mismo valor, el cual se probará que es supremo de A.
Para empezar sea $a_0 \in A$ (existe al ser A no vacío) y $m_0 = M$. Ahora bien, $a_0 \leq m_0$ y de hecho por la hipótesis debe darse $a_0 < m_0$.

Sea x_1 el punto medio entre a_0 y m_0 (explícitamente $x_1 = (a_0 + m_0)/2$, ver el ejercicio 1.4.2). Hay dos casos para x_1: que sea o que no sea cota superior para A.

Caso 1: x_1 es cota superior para A. Aquí se toma $a_1 := a_0$ y $m_1 := x_1$.



Caso 2: x_1 **no** es cota superior para A. En este caso existe $a \in A$ de tal modo que $x_1 < a$; sean $a_1 := a$ y $m_1 := m_0$.



Debe observarse que en ambos casos se tiene $a_1 \leq m_1$.

El proceso continúa del mismo modo: Si ya se han construido

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k < m_k \leq \cdots \leq m_2 \leq m_1$$

donde cada m_j es cota superior de A y cada $a_j \in A$, se toma ahora el punto medio x_k de a_k y m_k. Si x_k es cota superior para A entonces se definen $a_{k+1} = a_k$ y $m_{k+1} = x_k$, si en cambio x_k no es cota superior de A entonces existe algún $a \in A$, $a > x_k$ y se definen $a_{k+1} = a$ y $m_{k+1} = m_k$.

Por construcción $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente y acotada superiormente (por m_1) y $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en monótona decreciente y acotada inferiormente (por a_1); se tiene entonces que ambas sucesiones convergen, supóngase $a_n \longrightarrow L$ y $m_n \longrightarrow N$.

Lo que se hará a continuación es ver que $L = N$ y después se verá que este valor común es justamente $\sup(A)$.
Como el proceso de construcción implica ir tomando puntos medios, es claro que

$$\begin{aligned}|m_n - a_n| &\leq \frac{1}{2}|m_{n-1} - a_{n-1}| \leq \frac{1}{2^2}|m_{n-2} - a_{n-2}| \\ &\leq \cdots \leq \frac{1}{2^{n-1}}|m_1 - a_1| \leq \frac{1}{2^n}|M - a_0|.\end{aligned}$$

Como $0 \leq m_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}(M - a_0) =: \frac{c}{2^n}$ y $(c/2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, se tiene de la ley de estricción (teorema 2.4.2) que $m_n - a_n \longrightarrow 0$, sin embargo por PA-SC se tiene que $m_n - a_n \longrightarrow L - N$, por lo que, por la unicidad del límite, $L - N = 0$, es decir $L = N$.
La última parte de la demostración consiste en ver que $L = \sup(A)$, lo cual se muestra en los dos puntos siguientes.

- L es cota superior de A: Dado cualquier $a \in A$ se tiene que $a \leq m_n$ pues cada m_n es cota superior de A. Por la monotonía en el límite (teorema 2.4.1) se sigue de la desigualdad anterior que $a \leq M = L$.

- L es mínima cota superior de A: Sea $K \in \mathbb{R}$ una cota superior de A, así $a_n \leq K$ para toda n, pues $a_n \in A$. Nuevamente, de la monotonía en el límite se sigue que $L \leq K$.

$\square$

2.6.3. Ejercicios

Ejercicio 2.6.1 *Utilice el ejercicio 2.3.4 para concluir que*

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \longrightarrow 1.$$

Ejercicio 2.6.2 *Sea* $0 < r < 1$. *Suponga que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *satisface*

$$|a_{n+1} - a_n| \leq r^n$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. *Muestre que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es de Cauchy.*

Ejercicio 2.6.3 *Para una sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *no basta que* $|a_{n+1} - a_n| \longrightarrow 0$ *para que la sucesión sea de Cauchy: Muestre que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por* $a_n = \sqrt{n}$

- *no es de Cauchy aunque satisface que*
- $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0.$

Ejercicio 2.6.4 *Sea* $c > 0$ *una constante dada. Se define una sucesión de modo recursivo mediante* $a_1 = c$ *y* $a_{n+1} = 1/(\sqrt{3} + a_n)$.

- *Demuestre que* $|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{3}|a_n - a_{n-1}|$ *para toda* $n \geq 2$.
- *Muestre que para* $n > m$ *se cumple* $|a_n - a_m| \leq (1/3)^{m-1}(3/2)|a_2 - a_1|$.
- *Concluya de lo anterior que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es de Cauchy.*

Sugerencia: *En el segundo punto use* $|a_n - a_m| \leq |a_n - a_{n-1}| + \cdots + |a_{m+1} - a_m|$

Los últimos dos puntos del ejercicio anterior se pueden generalizar, ese es el objetivo del ejercicio siguiente.

Ejercicio 2.6.5 (Contractividad implica ser de Cauchy) *Sea* $0 < r < 1$. *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión que satisface (ser* contractiva*) que* $|a_{n+1} - a_n| \leq r|a_n - a_{n-1}|$ *para toda* $n \geq 2$. *Demuestre las siguientes afirmaciones.*

- *Para* $n \geq m \geq 2$ *se cumple* $|a_n - a_m| \leq r^{m-1}\left(\frac{1}{1-r}\right)|a_2 - a_1|$.

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es de Cauchy y por tanto convergente.*

Ejercicio 2.6.6 *Sean* $a < b$ *dados. Considere la siguiente sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por*

$$a_1 = a,\ a_2 = b \text{ y } a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \text{ para } n \geq 3.$$

- *Haga un dibujo en la recta real, en donde vaya situando los puntos* a_n *de la sucesión.*

- *Demuestre que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es de Cauchy.*

- *Muestre que* $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *es monótona decreciente acotada inferiormente por* a.

- *Encuentre el valor de* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Sugerencia: *Para el último punto puede demostrar primero que* $a_{n+1} - a_n = (-1/2)^{n-1}(b-a)$ *y utilizar esto junto con el viejo truco de escribir* $a_{n+1} - a_1 = (a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_{n-1}) + \cdots + (a_2 - a_1)$.

2.7. ¿Qué significa $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$? Exponentes reales: a^x

Ya se ha discutido qué significa a^r, para $a > 0$ y $r \in \mathbb{Q}$. El objetivo de esta sección es definir el significado de a^x, cuando $x \in \mathbb{R}$ es arbitrario. Se comenzará con el siguiente lema técnico.

Lema 2.7.1 *Sea* $a > 1$ *y sean* $r > s$ *racionales, se tiene que* $a^r > a^s$.

Demostración: Se puede suponer que $r = n/N$, $s = m/N$, con $n, m, N \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}$. Como $r > s$ se tiene que $n > m$, por lo tanto $a^n > a^m$ (al ser $a > 1$) y al extraer raíz N-ésima se tiene $a^r > a^s$. $\square$

El siguiente resultado es importante para algunas pruebas de esta parte, puede verse como un resultado técnico.

Proposición 2.7.1 *Sea* $a > 0$ *y* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de racionales la cual converge a* 0. *Se tiene que la sucesión de potencias* $(a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* 1.

Demostración: El caso $a = 1$ es trivial y el caso $a < 1$ se puede reducir al caso $a > 1$ observando que $(1/a)^{r_n} = 1/a^{r_n}$. Se demostrará, por lo tanto, sólo el caso $a > 1$.
Sea $\varepsilon > 0$, se sabe por teorema 2.3.1 que $a^{1/n} \longrightarrow 1$ y tomando recíprocos se tiene que $a^{-1/n} \longrightarrow 1$. Existe $N_1 \in \mathbb{N}$ de tal forma que

$$|a^{-1/n} - 1| < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad |a^{1/n} - 1| < \varepsilon\,, \tag{2.6}$$

siempre que $n \geq N_1$. Para el positivo $1/N_1$ es posible encontrar $N \in \mathbb{N}$, $N \geq N_1$, de tal forma que si $n \geq N$ entonces $|r_n| < 1/N_1$ (pues $r_n \longrightarrow 0$). Ahora bien, para $n \geq N$ se tiene

$$1 - \varepsilon \underset{(2.6)}{<} a^{-1/N_1} < a^{r_n} < a^{1/N_1} \underset{(2.6)}{<} 1 + \varepsilon\,,$$

donde en las desigualdades intermedias se ha utilizado el lema 2.7.1 junto con $-1/N_1 < r_n < 1/N_1$. Lo anterior muestra que, para $n \geq N$, se tiene $|a^{r_n} - 1| < \varepsilon$.

$\square$

La importancia de la proposición anterior está en la siguiente consecuencia que se desprende de ella.

Corolario 2.7.1 ***(Independencia de sucesión racional de exponentes)*** *Sea $a > 0$. Si las sucesiones de números racionales $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen al mismo valor $x \in \mathbb{R}$ entonces ambas sucesiones de potencias $(a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ y $(a^{s_n})_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes y de hecho convergen al mismo valor.*

Demostración: Primero se verá que, en caso de ser alguna de las sucesiones convergentes, entonces la otra también lo sería y el valor del límite sería el mismo. Si $(a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, se tiene que

$$a^{s_n} = a^{r_n+(s_n-r_n)} \underset{\text{Prop. 2.5.2}}{=\!=\!=} a^{r_n}a^{s_n-r_n}.$$

Ahora bien, al aplicar PA-SC y la propocisón 2.7.1 se puede concluir de lo anterior que $a^{s_n} \longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$.
De todo lo anterior, se sabe ahora que bastará ver la convergencia de $(a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ para alguna sucesión adecuada de racionales $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que seavconvergente a x. Sea $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una suceción de racionales que sea monótona creciente y sea $N \in \mathbb{N}$ un natural con $N > x = \sup(\{r_n : n \in \mathbb{N}\})$. Al igual que antes, puede suponerse que $a > 1$ pues el caso en que $0 < a < 1$ se reduce a este y el caso $a = 1$ es trivial. Debe observarse ahora que, del lema 2.7.1, se tiene que

$$a^{r_n} \leq a^{r_{n+1}} \leq a^N$$

lo cual muestra que $(a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente y acotada superiormente por a^N, consecuentemente $(a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

□

El corolario anterior dice que el siguiente concepto de potencia está bien definido, este es el concepto principal de la sección.

Definición 2.7.1 *Sea $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$ arbitrario. Se define a^x como el límite $\lim_{n\to\infty} a^{r_n}$, donde $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de racionales con $r_n \longrightarrow x$.*

Proposición 2.7.2 *Sea $a > 0$, $a \neq 1$. Si $x \geq 0$ satisface $a^x = 1$ entonces $x = 0$.*

Demostración: Nuevamente, tomando recíprocos basta considerar el caso $a > 1$. Sea $a > 1$ y sea $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de racionales convergiendo a x. Si se tuviera $x > 0$ entonces se podría encontrar $N \in \mathbb{N}$ de tal forma que

$$1/n < x/2 \qquad \text{y} \qquad |r_n - x| < x/2$$

siempre que $n \geq N$. Ahora bien, para $n \geq N$, $1 < a^{1/N} < a^{r_n}$, la última desigualdad puede verse al aplicar el lema 2.7.1 al hecho que $1/N < x/2 < r_n$. Como $1 < a^{1/N} < a^{r_n}$ para toda $n \geq N$, se tiene, de la monotonía al límite, que

$$1 < a^{1/N} \leq a^x = 1$$

lo cual contradice la propiedad de tricotomía. Se concluye por tanto que $x > 0$ es falso y de $x \geq 0$ se debe tener entonces que $x = 0$.

$\square$

Para terminar la sección se responde la pregunta de cuál debe ser el valor asignado a $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$. Primero, observe que el teorema de existencia y unicidad de raíces positivas (teorema2.4.4) permite aproximar el valor de $\sqrt{3}$ (se puede programar la sucesión y hacer iteraciones hasta estabilizar los primeros decimales).

$$\sqrt{3} = 1.73205080757\cdots$$

De hecho la sucesión en cuestión que converge a $\sqrt{3}$ está dada por $b_1 = 3$ y

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{3}{b_n}\right).$$

Se obtiene la siguiente tabla de los valores de los primeros términos de la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que, por cierto, se estabiliza muy rápido como puede preciarse.

n	1	2	3	4	5	6	7
r_n	3	2	1.75	1.7321428	1.73205081	1.73205080	1.73205080

Con esto se puede ver que es posible tomar (por buena aproximación) $\sqrt{3} \approx c := 1.7320508$.
A continuación se analiza $\sqrt{2}$ de modo similar, con la sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ análoga: $r_1 = 2$ y

$$r_{n+1} = \frac{1}{2}\left(r_n + \frac{2}{r_n}\right).$$

Para $\sqrt{2}$ conviene más expresar los valores de r_n en forma racional (que es la forma que se usa)

n	1	2	3	4	5	6	7
r_n	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{577}{408}$	$\frac{665857}{470832}$	$\frac{886731088898}{627013566048}$	$\frac{141421356}{10^8}$

aunque se muestra a continuación también la forma decimal para ver que dicha sucesión se estabiliza también muy rápido:

n	1	2	3	4	5	6	7
r_n	2	1.5	1.416666	1.4142156	1.41421356	1.41421356	1.41421356

Por último, utilizando lo anterior se puede calcular (aproximar) el valor de $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$ mediante la sucesión $(c^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$:

n	1	2	3	4	5	6
c^{r_n}	2.99999997378	2.27950704	2.177513649	2.1745839	2.1745814	2.1745814

Se concluye que $\sqrt{3}^{\sqrt{2}} \approx 2.1745$. Debe observarse que esta es una aproximación del número dado, el valor exacto se tiene en el *límite* de la sucesión (i.e. en el infinito). De todos modos el lector puede calcular más valores de la sucesión usada y convencerse que el valor que se da aquí tiene un error de menos de una diezmilésima. Un análisis correcto del error implica técnicas de *análisis numérico*, las cuales están fuera del objetivo de este libro.

2.7.1. Ejercicios.

Ejercicio 2.7.1 *Ahora que ya tiene sentido tomar exponentes reales, adecúe la demostración de la proposición 2.7.1 para probar el siguiente enunciado: Sea* $a > 0$ *y* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números reales convergente a* 0*. Se tiene entonces que* $(a^{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* 1*.*

Ejercicio 2.7.2 *Sea* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números reales convergente a* $x \in \mathbb{R}$*. Muestre que para* $a > 0$ *se tiene que* $a^{x_n} \longrightarrow a^x$*.*
Sugerencia: *Tome racionales* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergiendo a* x *y use* $x_n = r_n + (x_n - r_n)$.

Ejercicio 2.7.3 (Leyes de exponentes) *Sea* $a > 0$*. Se valen*

a) $a^x a^y = a^{x+y}$.

b) $(a^x)^y = a^{xy}$.

c) $a^x b^x = (ab)^x$*, para* $b > 0$.

d) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

e) $1^x = 1$.

f) $a^x = 1/a^{-x}$.

Sugerencia: *Usar sucesiones de racionales y PA-SC.*

Ejercicio 2.7.4 *Sea $a > 1$ y sean $x > y$ números reales cualesquiera. Demuestre que $a^x > a^y$.*

Ejercicio 2.7.5 *Sean $a > b > 1$ y $x > 0$. Muestre que $a^x > b^x$.*

Ejercicio 2.7.6 *Sea $x > 0$. Muestre que la sucesión $(n^x)_{n\in\mathbb{N}}$ es*

- *monótona creciente y*
- *no es acotada superiormente.*

Concluya con lo anterior que si $a < 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} n^a = 0$.

Sugerencia: *Para el segundo punto; si fija $N \in \mathbb{N}$ con $1/N < x$ entonces toda cota superior M de $(n^x)_{n\in\mathbb{N}}$ produciría la cota superior M^N del conjunto $\{n \in \mathbb{N} : n \geq N\}$.*

Ejercicio 2.7.7 *Sean $a > 1$ y $1 \geq k > 0$. Demuestre el siguiente límite notable.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$$

¿Qué pasa si $k > 1$?

Sugerencia: *Para la primera parte; el caso $k = 1$ es lo que resuelve el ejercicio 2.4.6 (tiene que convencerse). El caso $0 < k < 1$ se apoya del caso $k = 1$ usando la ley de estricción (teorema 2.4.2). Para la pregunta final tome $b := a^{1/k}$ y observe que $n^k/a^n = [n/b^n]^k$ para su análisis.*

2.8. Series: Un tipo especial de sucesiones

Esta parte es dedicada a un tipo especial de sucesión llamada serie. En cursos de cálculo integral se estudian más a fondo las series pues junto con técnicas de integración pueden darse resultados más interesantes.

2.8.1. Conceptos y resultados básicos

Se comenzará esta sección repasando algo de la notación Σ para sumas finitas.

Notación: Para $k \leq n$ enteros, se escribe $\sum\limits_{j=k}^{n} a_j$ para representar a la suma

$$a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Ejemplo 2.8.1 *Ya se han utilizado algunas cosas sobre sumas en este texto, ahora se escribirán algunas de esas pero utilizando la notación* Σ.

- *En el ejercicio 1.3.10 se tiene una fórmula muy útil que puede escribirse como* $(1-x)\left(\sum\limits_{j=0}^{n} x^j\right) = 1 - x^{n+1}$.

- *Las desigualdades (que por cierto son muy útiles en los cursos de cálculo integral) dadas en el ejercicio 1.4.22 pueden escribirse como sigue*

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 < \frac{n^3}{3} < \sum_{i=1}^{n} i^2 \qquad y \qquad \sum_{j=1}^{n-1} j^3 < \frac{n^4}{4} < \sum_{j=1}^{n} j^3 \,.$$

- *La fórmula del binomio (de Newton) puede escribirse*

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j.$$

- *La conocida fórmula de sumación de Gauss es* $\sum\limits_{j=1}^{n} j = n(n+1)/2$.

- *Las desigualdades de los ejercicios 1.4.29 y 1.4.30, que fueron fundamentales cuando se estudió al número* e*, se pueden escribir como sigue*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!} < 3.$$

Algunas propiedades de la notación Σ que son fácilies de verificar (se recomienda al lector verificarlas) son las siguientes, en donde $k \leq n \leq m$.

- (Linealidad) $\sum\limits_{j=k}^{n}(a_j+b_j) = \sum\limits_{j=k}^{n} a_j + \sum\limits_{j=k}^{n} b_j$ y $\sum\limits_{j=k}^{n}(ca_j) = c\sum\limits_{j=k}^{n} a_j$.
- (Subaditividad) $\sum\limits_{j=k}^{n} a_j + \sum\limits_{j=n+1}^{m} a_j = \sum\limits_{j=k}^{m} a_j$.
- (Sumas telescópicas) $\sum\limits_{j=k}^{n} c(b_{j+1}-b_j) = c(b_{n+1}-b_k)$.

A continuación se dan las dos definiciones más importantes de esta sección.

Definición 2.8.1 *La* serie *asociada a la sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es la sucesión dada por las* sumas parciales $s_n := \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$.

De modo explícito, la serie asociada a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión

$$(a_1\,, a_1+a_2\,, a_1+a_2+a_3\,, \cdots).$$

Definición 2.8.2 *Se dice que la sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es* sumable *si su serie asociada es convergente. En este caso se escribe* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ *para representar el límite de la serie.*

En principio sólo debería poder escribirse $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ cuando la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es sumable, pues dicho símbolo representa a el límite, sin embargo muchas veces se abusa de la notación y se escribe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ para referirse también a la serie asociada a la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. También en este texto se procederá de esa misma manera, esperando que el lector pueda distinguir con el contexto cuál es el caso.

Los siguientes son ejemplos de sucesiones sumables, las cuales ya han aparecido en el texto previamente:

Ejemplo 2.8.2 *En el teorema 2.3.2 vimos que la sucesión geométrica* $(x^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ *es sumable si* $|x| < 1$ *y que la serie geométria asociada converge* $\sum_{j=0}^{\infty} x^j = 1/(1-x)$. *Como ejemplo particular: Si* $a_n = (-1)^{n-1}/2^{n-1}$ *entonces* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es sumable y*

$$1 - 1/2 + 1/4 - 1/8 + 1/16 - \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j = \frac{1}{1-(-1/2)} = \frac{2}{3}.$$

Ejemplo 2.8.3 *En el ejercicio 2.4.9 se pidió al lector demostrar que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *converge (al valor que se designó como* $\zeta(2)$*).*

Ahora toca el turno de exhibir una sucesión no sumable.

Ejemplo 2.8.4 (Teorema de Oresme) *La llamada serie armónica* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ *no es sumable. Para ver esto, sea* s_n *la* n*-ésima suma parcial* $1+1/2+1/3+\cdots+1/n$. *Si la serie fuera sumable entonces, por definición, la sucesión* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sería convergente y por tanto todas sus subsucesiones serían acotadas al ser también convergentes. A continuación se va a ver que la subsucesión* $(s_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ *no es acotada superiormente.*

Se agrupa con paréntsis la suma s_{2^n} en $n+1$ bloques, cambiando de bloque en cada potencia de 2 en el denominador, de modo explícito:

$$s_{2^n} = (1) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right).$$

Se afirma ahora que el valor de la suma dentro cada uno de los paréntesis es al menos $1/2$; en efecto,

$$\frac{1}{2^{j-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^j} \geq \underbrace{\frac{1}{2^j} + \cdots + \frac{1}{2^j}}_{2^{j-1} \text{ sumandos}} \geq 2^{j-1}\frac{1}{2^j} = \frac{1}{2}.$$

Como la suma s_{2^n} se dividió en $n+1$ bloques de sumas, cada una de ellas con valor de al menos $1/2$ se sigue que $s_{2^n} \geq (n+1)/2$, con lo cual, si existiera una cota superior M para (s_{2^n}) entonces esto produciría la cota superior $2M-1$ para el conjunto $\mathbb{N}$, lo cual no existe, según la propiedad arquimedianda (teorema 1.5.1).

Ahora que ya se tienen a mano ejemplos de sucesiones sumables y no sumables se continuará con los elementos teóricos de serties. Usando las PA-SC se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 2.8.1 (Linealidad de series convergentes) *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos series sumables y sea $c \in \mathbb{R}$ alguna constante dada. Se tiene entonces que*

a) La serie asociada a $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es sumable y además

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

b) La serie asociada a $(ca_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es sumable y $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(ca_n) = c\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Una técnica elemental para analizar la convergencia (o divergencia) de una serie es el poder escribir sus sumas parciales como sumas telescópicas; se requiere cierta práctica. A continuación se da un ejemplo para ilustrar esto.

Ejemplo 2.8.5 *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ *es convergente. En efecto, la suma parcial asociada es*

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{4j^2-1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2j-1)(2j+1)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2j-1} - \frac{1}{2j+1}\right)$$

con lo cual $s_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \underset{PA-SC}{\longrightarrow} (1/2)(1-0)$. *Se concluye que la serie dada es convergente y que de hecho* $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4j^2-1} = 1/2$.

Las sumas telescópicas son muy útiles, incluso para sucesiones que no son series. En el ejercicio 2.6.6 se pidió al lector encontrar el límite de la sucesión

$$a_1 = a,\ a_2 = b \text{ y } a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \text{ para } n \geq 3,$$

después de demostrar que ésta es de Cauchy. La idea para hallar el límite (que ya se sabe que existe) es verificar que $a_{n+1} - a_n = (-1/2)^{n-1}(b-a)$ y escribir entonces

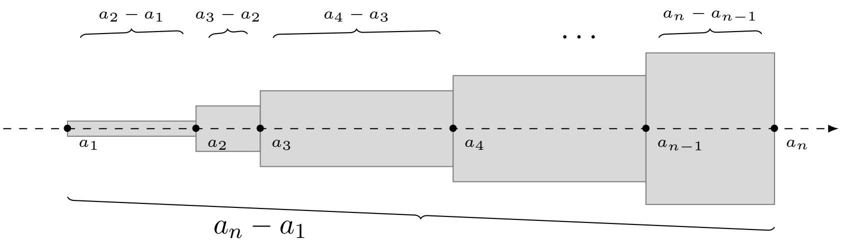
$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_1 &\underset{\text{Telescópica}}{=\!=} \sum_{j=1}^{n}(a_{j+1} - a_j) = \sum_{j=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^{j-1}(b-a) \\ &= (b-a)\sum_{j=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^{j-1} \underset{\text{Geométrica}}{=\!=} (b-a)\left(\frac{1-(-1/2)^{n+1}}{1-(-1/2)}\right) \end{aligned}$$

y como $a_1 = a$ se tiene de lo anterior que

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a + (b-a)\left(\frac{1-(-1/2)^{n+1}}{1-(-1/2)}\right) \\ &\underset{PA-SC}{\longrightarrow} a + (b-a)\left(\frac{1}{3/2}\right) = a + (2/3)(b-a), \end{aligned}$$

por lo que el límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $a + (2/3)(b - a)$.

El nombre de *suma telescópica* viene de que para calcular la longitud de un telescópio puede irse sumando las medidas de cada uno de los tramos. De modo gráfico, si se situá un telescopio en la recta real como se muestra a continuación, puede fácilmente observarse qué sucede con la medida total del telescopio: por un lado es $a_n - a_1$ pero por otro es justo la suma de cada uno de los tramos $(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$.



A continuación se verá una condición necesaria para que una sucesión sea sumable. La importancia de esta condición es que además de que es útil para decidir la divergencia de una serie, puede también ayudar (una vez que se tengan más criterios de convergencia) a construir sucesiones convergentes a 0.

Teorema 2.8.1 (Condición del resto) *Si la sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es sumable entonces* $a_n \longrightarrow 0$.

Demostración: Suponga que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Se quiere demostrar que $a_n \longrightarrow 0$, para esto sea $\varepsilon > 0$. Sea s_n la n-ésima suma parcial asociada, esto es, $s_n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$. Como $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente entonces es de Cauchy así que, para el ε dado, es posible encontrar $N \in \mathbb{N}$ con $|s_n - s_m| < \varepsilon$ siempre que $n, m \geq N$. Esta N funcionará: Dado $n \geq N$ se tiene en particular que

$$|a_n - 0| = |s_{n+1} - s_n| < \varepsilon\,,$$

donde se aplicó que $n + 1 > n \geq N$ en la última desigualdad. $\square$

Como mencionamos anteriormente, la condición del resto es una condición necesaria, pero no es suficiente como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.8.6 *La serie armónica (ejemplo 2.8.4) es tal que* $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ *y sin embargo* $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ *no es sumable.*

El punto de fallo en la convergencia de la serie armónica es que las sumas parciales, que son de términos positivos, no son acotadas superiormente. Se tiene el siguiente resultado para el caso de series de términos no negativos, la cual reduce analizar la convergencia a ver que una sucesión es acotada superiormente.

Proposición 2.8.2 (Criterio de acotación de sumas) *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números reales no negativos. La serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge si y solo si la sucesión de sumas parciales asociada* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es acotada superiormente.*

Demostración: Las dos direcciones de la prueba son sencillas.
$\boxed{\Rightarrow}$ Como toda sucesión convergente es acotada (teorema 2.2.1), así lo es $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y por tanto ésta es acotada superiormente.
$\boxed{\Leftarrow}$ Como la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada superiormente bastará ver, según el teorema de Weierstrass (teorema 2.4.3), que es monótona creciente; esto es trivial pues $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$. $\square$

2.8.2. Ejercicios

Ejercicio 2.8.1 *Sea $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión y $N \in \mathbb{N}$ un natural. Demuestre que $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es sumable si y solo si $(a_{N+j})_{j\in\mathbb{N}}$ es sumable. Observe que esto justifica formalmente que $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j = \sum\limits_{j=1}^{N} a_j + \sum\limits_{j=N+1}^{\infty} a_j$.*

Sugerencia: *Si c es la constante $a_1 + a_2 + \cdots + a_N$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son las sumas parciales asociadas a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(a_{N+j})_{j\in\mathbb{N}}$ respectivamente entonces $t_m + c = s_{N+m}$ para cada $m \in \mathbb{N}$; use ahora el ejercicio 2.1.6.*

Ejercicio 2.8.2 *Demuestre que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!+(n+2)(n-1)!}$ es convergente y encuentre el valor de la suma.*

Sugerencia: *Usar la linealidad de series convergentes y el teorema 2.5.2.*

Ejercicio 2.8.3 *El siguiente es un problema del concurso nacional de 1969 de la olimpiada de matemáticas de Canadá:*
Calcule la suma

$$\sum_{k=1}^{n} k!k.$$

Sugerencia: *Escriba la suma de forma telescópica usando*
$(k+1)! = (k+1)k!$.

Ejercicio 2.8.4 *Para cada una de las siguientes series escriba las sumas parciales como sumas telescópicas y analice la convergencia (o divergencia).*

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n-1)!+n!+(n+1)!}$.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Ejercicio 2.8.5 *Considere la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por*

$$a_n := \frac{n^{n+1/n}}{(n+1/n)^n}.$$

Demuestre que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 1 y concluya con la condición del resto que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Ejercicio 2.8.6 *Analice la convergencia de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}.$$

Sugerencia: *Demuestre primero que para cualquier natural n se vale*

$$1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2} = \left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)^2.$$

Ejercicio 2.8.7 *El objetivo de este ejercicio es demostrar el llamado* criterio de condensación, *resultado que se debe a Cauchy.*
Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona decreciente y tal que $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$. Sean s_n y t_n la n-ésima suma parcial de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$ respectivamente.

- *Demuestre que para $n < 2^m$ se cumple $s_n \leq t_m$ y que para $n > 2^m$ se cumple $s_n \geq (1/2)t_m$.*
- *Utilice lo anterior para demostrar que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada superiormente si y solo si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada superiormente.*
- *Con el criterio de acotación de sumas (proposición 2.8.2) concluya ahora el **criterio de condensación de Cauchy**: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge.*

2.8.3. Pruebas de Gauss, de D'Alembert y de la raíz

Teorema 2.8.2 (Prueba del mayorante, Gauss) *Sean* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesiones de términos no negativos y tales que* $a_n \leq b_n$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$. *Si* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es sumable con suma* L *así también lo es* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y se cumple* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \leq L$.

Demostración: Sean s_n y t_n las n-ésimas sumas parciales asociadas a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ respectivamente. Se tiene entonces de la hipótesis que $0 \leq s_n \leq t_n$ y que $t_n \longrightarrow L$. Al ser $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente es acotada y existe por tanto $M \in \mathbb{R}$ de tal forma que $t_n < M$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por transitividad se sigue que $0 \leq s_n < M$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Basta ahora aplicar el criterio de acotación de sumas (proposición 2.8.2) para concluir que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es sumable.
La última parte es consecuencia de la monotonía al límite y el hecho que $s_n \leq t_n$. $\square$

La prueba del mayorante puede ayudar a analizar la convergencia de series complejas en la que se comparan con otras conocidas más *simples*. A continuación se da un ejemplo para ilustrar esta técnica.

Ejemplo 2.8.7 *La serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(3^n+2n+5)+\cos^2(5^n+3n+7)}{5^n+2^n+n+1}$ *converge.*
Claramente se tiene

$$0 \leq \frac{\sin^2(3^n+2n+5)+\cos^2(5^n+3n+7)}{5^n+2^n+n+1} \leq \frac{2}{5^n+2^n+n+1} < \frac{2}{5^n}.$$

De la proposición 2.8.1 y de la serie geométrica, sabemos que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{2}{5^n}$ *converge, de hecho converge a* $2(\frac{1}{1-1/5}) - 2 = 5/2 - 2 = 1/2$. *De la prueba del mayorante de Gauss se tiene que la serie de arriba converge y de hecho*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(3^n+2n+5)+\cos^2(5^n+3n+7)}{5^n+2^n+n+1} \leq 1/2.$$

La contrarrecíproca de la prueba del mayorante es también muy útil, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.8.8 *La serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ *diverge pues* $0 < 1/n \leq 1/\sqrt{n}$ *y la serie armónica diverge.*

De hecho, es posible generalizar el ejemplo anterior, lo cual se hará ahora en el siguiente teorema; el lector requiere haber resuelto el ejercicio 2.8.7 (criterio de condensación de Cauchy) para los dos últimos casos de la prueba.

Teorema 2.8.3 (Serie de Dirichlet) *La serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ *converge si* $p > 1$ *y diverge si* $p \leq 1$.

Demostración: La prueba se divide en cuatro casos.
Caso 1: $\boldsymbol{p = 1}$. Se trata de la serie armónica, de la cual ya se sabe que es divergente.
Caso 2: $\boldsymbol{p \leq 0}$. Aquí basta observar que $n^p \leq n^0 = 1$ y así $1/n^p \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde, por la condición del resto (teorema 2.8.1), se tiene que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ diverge.
Caso 3: $\boldsymbol{0 < p < 1}$. Se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{1-p})^n$$

y al ser $2^{1-p} > 2^0 = 1$ se tiene que $(2^{1-p})^n > 1$ por lo que, por la condición del resto se tiene que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2^{1-p})^n$ no puede ser convergente. Se concluye por el criterio de condensación de Cauchy (ejercicio 2.8.7) que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ diverge.

Caso 4: $p > 1$. Al igual que antes se tiene $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2^{p-1}})^n$, sea $x := \frac{1}{2^{p-1}}$, $x < 1$ y así la serie geométrica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ converge. Nuevamente, del criterio de condensación de Cauchy dice que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ converge. □

El valor de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ para $p > 1$ es denotado por $\zeta(p)$ y está asociado a la función zeta de Riemann. Ya se había hablado de $\zeta(2)$ en el ejercicio 2.4.9. Euler demostró que $\zeta(2) = \pi^2/6$ y $\zeta(4) = \pi^4/90$, hecho que no se probará aquí pues requiere de técnicas de series de potencias.

Ahora se verá otra prueba de convergencia. Para que el lector entienda completamente su demostración se recomienda que resuelva el ejercicio 2.8.1, lo cual cubre una mera formalidad en la demostración, un detalle fino.

Teorema 2.8.4 (Prueba del cociente, D'Alembert) *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de términos estrictamente positivos y tales que* $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) = L \in \mathbb{R}$.

Se tiene entonces que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *es* $\begin{cases} \textit{convergente si} & L < 1, \\ \textit{divergente si} & L > 1. \end{cases}$

Demostración: Es de observarse que siempre se tiene $L \geq 0$.

Caso 1: $0 \leq L < 1$. Sea k un número de tal forma que $L < k < 1$ (se puede elegir un tal número por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$). Para el positivo $\varepsilon := k - L$ se puede fijar $N \in \mathbb{N}$ de tal forma que: $n \geq \mathbb{N}$ implica que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - L\right| < \varepsilon = k - L$. De esto se sigue que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - L \leq \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - L\right| < k - L$$

y al trasladar con L se obtiene en particular $k > a_{n+1}/a_n > 0$ y así $a_{n+1} < ka_n$ siempre que $n \geq N$. Para $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se sigue de $a_{n+1} < ka_n$ (ejercicio sencillo de inducción) que

$$0 < a_{N+j} \leq k^j a_N \,. \tag{2.7}$$

Usando linealidad de series convergentes (prop. 2.8.1) y la convergencia de la serie geométrica (pues $k < 1$) se sigue que $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_N k^j = a_N \sum\limits_{j=0}^{\infty} k^j$ converge; con esto, (2.7) y la prueba del mayorante se tiene que la sucesión $(a_{N+j})_{j\in\mathbb{N}}$ es sumable, por lo que, del ejercicio 2.8.1, se deduce que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Caso 2: $L > 1$. Aquí se verá que $a_n \not\to 0$ y así, por la condición del resto (teorema 2.8.1) la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ no puede ser convergente.

Sea k un número fijo tal que $L > k > 1$. Para el positivo $L - k$ se puedes tomar $N \in \mathbb{N}$ de tal modo que $|\frac{a_{n+1}}{a_n} - L| < L - k$ siempre que $n \geq N$, por tanto $-(L-k) < \frac{a_{n+1}}{a_n} - L$, de donde al trasladar con L se tiene $k < a_{n+1}/a_n$ y así $a_{n+1} > ka_n > a_n$ (usando $k > 1$) siempre que $n \geq N$. Esto muestra que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente y en particular que $a_n \geq a_N$ para $n \geq N$, se sigue entonces o bien $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ no existe o si existe, por la monotonía en el límite (teorema2.4.1), entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq a_N > 0$, en cualquier caso $a_n \not\to 0$. $\square$

Lo anterior permite dar ejemplos más sofisticados.

Ejemplo 2.8.9 *Sea $x > 0$. La serie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} x^n/n!$ es convergente. En efecto, la sucesión de positivos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = x^{n-1}/(n-1)!$ tiene por serie correspondiente la serie dada arriba. Ahora bien*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{x^{n-1}} = \frac{x}{n} = x\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[\text{PA-SC}]{} x \cdot 0 = 0,$$

así que de la prueba de convergencia (teorema 2.8.4) se concluye que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ *converge.*

Esto da posibilidad de definir lo siguiente.

Definición 2.8.3 *Para el número* $x > 0$ *se define* $\exp(x)$ *mediante* $\exp(x) := \sum\limits_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} x^n/n!$.

Del teorema 2.5.2 se tiene $\exp(1) = e$.

Es importante mencionar que la prueba de D'Alembert no dice nada en el caso en que $L = 1$. De hecho para ésto puede darse tanto el caso de que la serie converja como que diverja. Ésto se exhibe en el siguiente ejemplo clásico.

Ejemplo 2.8.10 *Sean* $a_n = 1/n$ *y* $b_n = 1/n^2$. *Se tiene que* $a_{n+1}/a_n \longrightarrow 1$ *y* $b_{n+1}/b_n \longrightarrow 1$. *La serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge y* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge.*

Una consecuencia de la prueba del mayorante de Gauss (y de la convergencia de la serie geométrica) es la siguiente.

Teorema 2.8.5 (Prueba de la raíz) *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión con* $a_n \geq 0$ *para toda* n *y tal que existe el límite* $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Se tiene entonces que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} \textit{converge si} & L < 1 \\ \textit{diverge si} & L > 1 \end{cases}.$

Demostración: La técnica es similar a la de la prueba de D'Alembert.
Caso 1: $\boldsymbol{L < 1}$. Sea $k \in \mathbb{R}$ con $L < k < 1$. Para $\varepsilon = k - L > 0$ se puede tomar $N \in \mathbb{N}$ de tal forma que $|\sqrt[n]{a_n} - L| < \varepsilon = k - L$ siempre que $n \neq N$, con esto $0 \leq \sqrt[n]{a_n} < k$ de dónde $0 \leq a_n < k^n$. La

serie geométrica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} k^n$ es convergente pues $0 < k < 1$ y así por el criterio del mayorante se concluye de $0 \leq a_n < k^n$ que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es covergente.

Caso 2: $\boldsymbol{L > 1}$ Sea k con $L > k > 1$. Para $\varepsilon = L - k > 0$ elegimos $N \in \mathbb{N}$ de tal forma que $|\sqrt[n]{a_n} - L| < \varepsilon = L - k$ siempre que $n \geq N$. Con esto se sigue que $\sqrt[n]{a_n} > k > 1$ para $n \geq \mathbb{N}$ con lo que $a_n > 1$ para toda $n \geq \mathbb{N}$. Lo anterior dice que o bien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge o si converge entonces converge a algo mayor o igual a 1, de la condición del resto (teorema 2.8.1) se sigue ahora que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no puede ser sumable. $\square$

Nuevamente el criterio no dice nada para el caso $L = 1$ y los ejemplos que sirven para ver que efectivamente todo puede suceder, son los mismos que los del ejemplo 2.8.10.

2.8.4. Ejercicios.

Ejercicio 2.8.8 *Muestre que la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+5n+8}$ *es divergente.*

Ejercicio 2.8.9 *Se sabe del ejemplo 2.8.5 que la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ *es convergente; demuestre sin embargo que* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1}$ *es divergente.*

Ejercicio 2.8.10 *Analice la convergencia de* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

Ejercicio 2.8.11 *Demuestre que* $(2^n n!)/n^n \longrightarrow 0$ *mostrando que la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2^n n!)/n^n$ *es convergente y usando la condición del resto (teorema 2.8.1).*

Ejercicio 2.8.12 *¿Es la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ *convergente?*

Ejercicio 2.8.13 *¿Cuáles de las siguientes series son convergentes y por qué?*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{n^n}.$$

Ejercicio 2.8.14 *Analice la convergencia de las siguientes series:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^{2n}.$$

2.9. Convergencia absoluta

Se sabe del teorema de Oresme (ejemplo 2.8.4) que la serie armónica es divergente. Sin embargo si se alternan los signos se obtiene una serie que es convergente:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln(2)$$

La demostración de esta igualdad requiere cálculo integral (cosa que no es parte de esta obra) y conocer la función logarítmica, la cual se estudiará más adelante. Se puede sin embargo dejar el valor exacto de lado y analizar de la convergencia, que resultará del teorema de Leibniz (ver el teorema 2.9.1).

Lo anterior muestra que si una serie converge, como en el caso $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$, entonces la serie de sus valores absolutos no tiene porqué converger, cosa que pasa en el caso de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n$. Surgen varias preguntas:

- ¿Vale la otra dirección?, es decir, ¿si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge converge entonces converge también $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$?
- ¿Se puede imponer una condición a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ para garantizar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converja?

La respuesta a la primera es afirmativa y es el tema de convergencia absoluta. La segunda se responde con el siguiente teorema que se debe a Leibniz y es citada como la *regla de Leibniz para series alternadas*. Se espera que el lector haya resuelto el ejercicio 2.1.8 pues se haršo de este en la prueba siguiente.

Teorema 2.9.1 (Leibniz) *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión con $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$ y tal que $a_n \longrightarrow 0$. Se tiene entonces que la serie alternada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ converge.*

Demostración: Sea $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de sumas parciales asociadas a la serie alternada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$. Se quiere demostrar que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente; por el ejercicio 2.1.8 bastará demostrar que $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ y $(s_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ son ambas convergentes y con el mismo límite. Si ambas sucesiones $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ y $(s_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergieran entonces el límite tendría que ser el mismo, esto pues basta aplicar PA-SC a

$$s_{2n} = s_{2n-1} - a_{2n} \tag{2.8}$$

y el hecho que $a_{2n} \longrightarrow 0$ para convencerse que dichos límites coinciden en caso de existir ambos. Lo único que queda por demostrar entonces es la convergencia de dichas sucesiones de sumas parciales.

Se tiene que

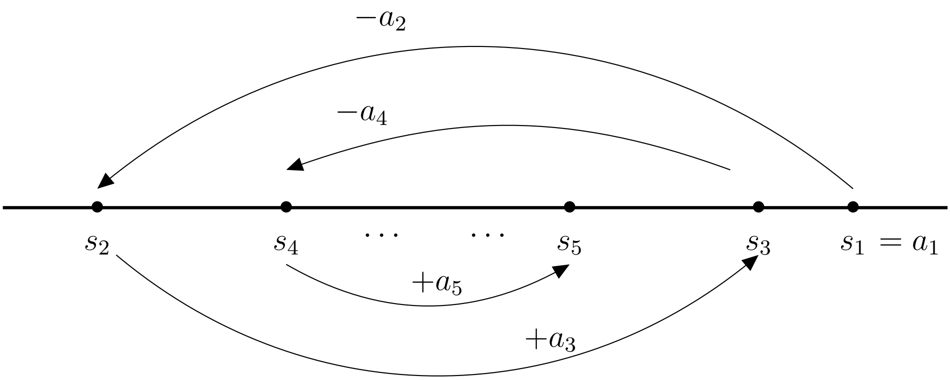
$$s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} > 0\,,$$
$$s_{2n-1} - s_{2n+1} = -(-a_{2n} + a_{2n+1}) > 0$$

de donde $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente y $(s_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona decreciente. Ahora bien, la igualdad (2.8) muestra que $s_{2n} < s_{2n-1}$ (pues $a_{2n} > 0$) y con esto se tiene que

$$s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \cdots \leq s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq \cdots \leq s_3 \leq s_1$$

con lo cual se ve que s_1 es una cota superior para la sucesión monótona creciente $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ y s_2 es una cota inferior para la sucesión monótona decreciente $(s_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$. Por el teorema de Weierstrass (teorema 2.4.3) se concluye que ambas sucesiones deben ser convergentes. □

La idea principal de la demostración del teorema de Leibniz se puede resumir en un dibujo:



Ejemplo 2.9.1 *Del teorema de Leibniz se sigue que ambas series* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$ *y* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}/\sqrt{n}$ *son convergentes.*

Ahora toca el turno de responder la otra pregunta hecha al inicio de la sección.

Teorema 2.9.2 *Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *es convergente entonces así también lo es* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Demostración: Sea $b_n := a_n + |a_n|$. Si se demuestra que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es sumable entonces por la linealidad de series convergentes (prop. 2.8.1) se tendrá de $a_n = b_n - |a_n|$ que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es sumable.
La prueba de que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es sumable es como sigue.
De $a_n \leq |a_n|$ se obtiene que $0 \leq b_n \leq 2|a_n|$, con lo cual es fácil ver de la hipótesis de que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente y de la prueba del mayorante de Gauss (teorema 2.8.2) que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. □

Definición 2.9.1 *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *se dice*

- absolutamente convergente *si* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge (y entonces también* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge),*
- condicionalmente convergente *si es convergente pero no absolutamente convergente.*

Ejemplo 2.9.2 *La serie alternada* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/\sqrt[3]{n}$ *es convergente según el teorema de Leibniz (teorema 2.9.1) pero no es absolutamente convergente según el teorema 2.8.3; por lo tanto* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/\sqrt[3]{n}$ *es condicionalmente convergente.*

Hay propiedades importantes de series absolutamente convergentes, como el hecho de que estas se pueden *reordenar*, cosa que no sucede con series condicionalmente convergentes. Esto es importante pues dice que *el orden de los sumandos **sí** afecta la suma.* Aquí se está dejando estos temas fuera pensando que serán cubiertos en un curso de cálculo integral, existen muchos más resultados sobre series en general que pueden darse ya teniendo a mano la herramienta del cálculo integral; de hecho la elección de los temas en esta parte de series ha sido mínima, para complementar la parte de sucesiones.

2.9.1. Ejercicios.

Ejercicio 2.9.1 *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en el teorema de Leibniz (teorema 2.9.1) y sea $L = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$. El error $|L - s_n|$ de la suma respecto a una suma parcial s_n, se puede estimar de $0 < (-1)^n(L - s_n) < a_{n+1}$. Demuestre estas desigualdades.*

Ejercicio 2.9.2 *Dada una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se definen otras sucesiones $(a_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(a_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ mediante*

$$a_n^+ := \begin{cases} a_n & \textit{si } a_n > 0 \\ 0 & \textit{si } a_n \leq 0 \end{cases} \qquad \textit{y} \qquad a_n^- := \begin{cases} a_n & \textit{si } a_n < 0 \\ 0 & \textit{si } a_n \geq 0 \end{cases}.$$

Demuestre la equivalencia entre las siguientes dos afirmaciones.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es absolutamente convergente.*

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ *son ambas convergentes.*

Sugerencia: *Escriba relaciones entre los términos a_n^+, a_n^- y $|a_n|$.*

Parte II

Límites y continuidad de funciones reales de variable real

3

Funciones y sus límites.

Este capítulo contiene el concepto de límite de una función. Se dará la definición clásica $\varepsilon - \delta$ aunque se dará más énfasis en su equivalencia por sucesiones.
Primero se dan unas palabras sobre funciones en general.

3.1. Repaso de funciones

Formalmente hablando, una función f de un conjunto A a un conjunto B (denotado $f : A \longrightarrow B$) es un subconjunto (que se denotará también con $f \subset A \times B$) del producto cartesiano $A \times B$ satisfaciendo lo siguiente:

- Si $(a, b_1) = (a, b_2)$ están en f entonces $b_1 = b_2$.
- Para cada $a \in A$ existe un $b \in B$ de tal forma que $(a, b) \in f$.

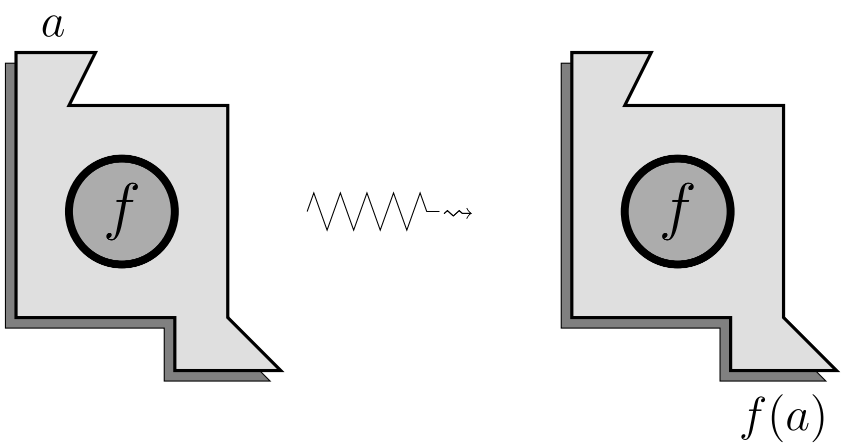
Observe que el elemento $b \in B$ del segundo punto es único según el primer punto, por tanto se suele denotar a dicho b como $f(a)$.

La función entonces *depende* de cómo se *elijan* los valores en B, esto es

$$f = \{(a, f(a)) : a \in A\} \,.$$

En la práctica se puede imaginar una función f como una *maquinita* que trabaja con materia prima los elementos de A, uno mete un $a \in A$ a la maquinita f y ésta arroja de producto procesado un elemento de B, a saber $f(a)$.

Algunos elementos importantes de las funciones son *el dominio*, que es el conjunto A, el *contradominio*, que es el conjunto B, la *imagen* $Im(f) := \{f(a) : a \in A\} \subset B$ y la *regla de asignación*, que dice qué valor de B le corresponde a un $a \in A$.



La función *identidad* $\mathbb{1}_A : A \longrightarrow A$ es la función $\{(a, a) : a \in A\}$; una función constante es una del tipo $\{(a, b_0) : a \in A\}$, donde $b_0 \in B$ es fijo.

Se termina el repaso de funciones recordando los siguientes conceptos.

Definición 3.1.1 *Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Se dice que f es*

- inyectiva *si $f(a_1) = f(a_2)$ implica $a_1 = a_2$.*
- suprayectiva *si $Im(f) = B$.*
- biyectiva *si es tanto inyectiva como suprayectiva.*
- invertible *si existe $g : B \longrightarrow A$ tal que $f \circ g = \mathbb{1}_B$ y $g \circ f = \mathbb{1}_A$.*

En los cursos de lógica y conjuntos se demuestra (hágalo aquí a manera de ejercicio o repaso) que una función f es biyectiva si y solo si es invertible, dicha inversa es única y es denotada por f^{-1}.

3.2. El concepto del límite: $\varepsilon - \delta$.

Antes de dar la definición de límite se necesitará el concepto de punto de contacto de un subconjunto de números reales. En muchos libros no se pone atención a esto, pero el lector astuto se dará cuenta que es un *error* pasarlo por alto, pues generaría límites *vacíos* (o más bien existencia de límites por vacuidad). La justificación de muchos autores es que de todos modos los *ejemplos interesantes* son funciones con dominios intervalos (de más de un punto). Aquí se ha optado por definir puntos de contacto, este enfoque abarca incluso al de límites laterales, haciendo que estos últimos sean inecesarios de definirse.

3.2.1. Puntos de contacto.

Definición 3.2.1 *Sea $D \subset \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. Se dice que a es punto de contacto de D si para cada $\delta > 0$, el intervalo $U_\delta(a) := (a-\delta, a+\delta)$*

centrado en a*, contiene al menos un elemento de* $D - \{a\}$ *(es decir* $U_\delta(a) \bigcap [D - \{a\}] \neq \emptyset$*).*

Unas observaciones importantes son las siguientes:

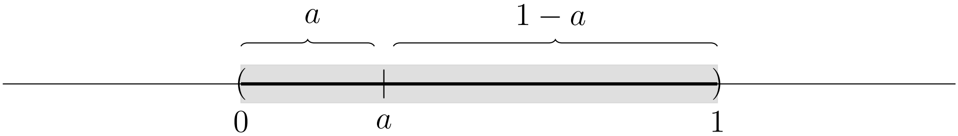
- El punto de contacto $a \in \mathbb{R}$ no tiene porque ser elemento de D (aunque puede serlo); a solo debe estar *muy cerca de* D.
- Aún cuando se de que el punto de contacto esté en D, es decir $a \in D$, se debe poder encontrar *otro* elemento de D en el intervalo $U_\delta(a)$.
- Un punto $x \in \mathbb{R}$ está en $U_\delta(a)$ si y solo si $|x - a| < \delta$.

Se ha usado D para representar el conjunto pues más adelante D representará el dominio de una función. A continuación se tiene un par de ejemplos para aclarar un poco más el concepto.

Ejemplo 3.2.1 $0 \in \mathbb{R}$ *es punto de contacto de* $D := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. *En efecto, sea* $\delta > 0$*, por la propiedad arquimediana se sabe que existe* $n \in \mathbb{N}$ *con* $\delta > \frac{1}{n} = |\frac{1}{n} - 0|$*, así*

$$\frac{1}{n} \in U_\delta(0) \cap [D - \{0\}].$$

Ejemplo 3.2.2 *Se tiene que cualquier* $a \in (0, 1)$ *es punto de contacto de* $D = (0, 1)$*. De hecho* $0, 1$ *también son puntos de contacto aunque la comprobación de esto último se le deja al lector (vea el ejercicio 3.2.2). Para demostrar que* $a \in (0, 1)$ *es punto de contacto, sea* $\delta > 0$*; se toma* $\varepsilon := (1/2)\,\text{mín}\{1 - a, a, \delta\}$.



Es un ejercicio sencillo demostrar que $U_\varepsilon(a) \subset U_\delta(a) \cap (0,1)$ *(ver ejercicio 3.2.1). Con esto y la densidad de* $\mathbb{R}$ *se puede tomar* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $a - \varepsilon < x < a$ *y claramente se tendrá que*

$$x \in U_\varepsilon(a) - \{a\} \subset U_\delta(a) \cap [(0,1) - \{a\}].$$

En el primer ejemplo el punto de contacto no pertenece al conjunto D, en el segundo ejemplo sí. Ahora ya se tienen las bases para empezar a trabajar con el concepto del límite, esto es lo que se hará en la siguiente sección a continuación. Para terminar esta sección se deja un resultado técnico que dará sentido al teorema de equivalencia entre límite de función y el de límite de sucesiones (vea el teorema 3.3.1).

Proposición 3.2.1 *Sea* $a \in \mathbb{R}$ *un punto de contacto para* D. *Existe entonces una sucesión* $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de elementos de* $D - \{a\}$ *tal que* $d_n \longrightarrow a$. *La sucesión puede tomarse de puntos todos diferentes entre sí.*

Demostración: Para $\delta_1 := 1 > 0$ es posible encontrar $d_1 \in U_1(a) \cap [D - \{a\}]$ pues a es punto de contacto de D. Observe que $d_1 \in D - \{a\}$ y que $\delta_2 := \min\{1/2, |d_1 - a|\} > 0$. Se puede entonces encontrar $d_2 \in U_{\delta_2}(a) \cap [D - \{a\}]$. Claramente $d_2 \neq d_1$ pues $|d_2 - a| < \delta_2 \leq |d_1 - a|$. El proceso continúa inductivamente: Supongase que se han construido $d_1, d_2, \cdots, d_{n-1}$ elementos de $D - \{a\}$ todos distintos entre sí, con $|d_j - a| < \delta_j \leq 1/j$, $j = 1, 2, \cdots n-1$. Sea

$$\delta_n := \min\left\{\frac{1}{n}, |d_1 - a|, |d_2 - a|, \cdots, |d_{n-1} - a|\right\},$$

claramente $0 < \delta_n \leq 1/n$. Usando nuevamente que a es punto de contacto de D se puede elegir $d_n \in U_{\delta_n}(a) \cap [D - \{a\}]$. Se tiene en particular que $|d_n - a| < \delta_n \leq |d_j - a|$ para $j = 1, \cdots, n-1$ por lo que d_n no coincide con ninguno de $d_1, \cdots, d_{n-1}$. Se ha construido hasta aquí una sucesión $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $D - \{a\}$ de elementos todos distintos entre sí, la demostración de la proposición concluye si se prueba que $d_n \longrightarrow a$. Sea $\varepsilon > 0$, por la propiedad arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ con $1/N < \varepsilon$. Para $n \geq N$ se tiene entonces

$$|d_n - a| < \delta_n \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

□

El regreso de la proposición es también válido; para ver esto se sugiere resolver el ejercicio 3.2.5.

3.2.2. Definición de límite.

A lo largo de esta sección D representa un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$.

Definición 3.2.2 *Sean $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, a un punto de contacto de D y $L \in \mathbb{R}$. Se dice que la función f* tiende a L en a *(o que límite de $f(x)$ es L cuando x tiende al valor a) si: para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ satisfaciendo la siguiente implicación*

$$x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Observe que el lado izquiero en la implicación de la definición anterior requiere $x \in U_\delta(a) \cap [D - \{a\}]$, lo cual siempre se tiene cuando a es punto de contacto para D. El lector atento se habrá dado cuenta de la similitud entre esta definición y el concepto de límite de una sucesión de números reales: en ambos casos la definición se trata de, dado $\varepsilon > 0$, encontrar algo (aquí $\delta > 0$ y allí $N \in \mathbb{N}$) de tal forma que se garantice una implicación que termina en *la distancia al límite* L menor a ε; no es casualidad que muchos de los resultados sean similares (e incluso lleven el mismo nombre).

Se empezará con un ejemplo básico, en el que $D = \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.2.3 *Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $x \mapsto 2x + 1$. *Se afirma que* $f(x)$ *tiende a* 3 *cuando* x *tiende a* 1. *En efecto, sea* $\varepsilon > 0$. *Se quiere encontrar* $\delta > 0$ *con*

$$x \in \mathbb{R}\,, 0 < |x - 1| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon.$$

Ahora bien

$$|f(x) - 3| = |(2x + 1) - 3| = |2x - 2| = 2|x - 1|$$

con lo cual se ve que si se toma $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, *entonces* $\delta > 0$ *es tal que, si se supone que* $0 < |x - 1| < \delta$, *entonces*

$$|f(x) - 3| = 2|x - 1| < 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

Proposición 3.2.2 (Unicidad del límite) *El límite de una función* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *en* a, *punto de contacto de* D, *es único cuando existe.*

Demostración: Sean $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ límites de $f(x)$ cuando x tiende a a. Se quiere demostrar que $L_1 = L_2$. Si se supone, por el contrario, que $L_1 \neq L_2$, se tendría $|L_1 - L_2| > 0$, para $\varepsilon = \frac{1}{2}|L_1 - L_2| > 0$, existirían entonces $\delta_1, \delta_2 > 0$ con:

$$x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon\,,$$
$$x \in D,\ 0 < |x - a| < \delta_2 \Longrightarrow |f(x) - L_2| < \varepsilon\,.$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Para $x \in D$ con $0 < |x - a| < \delta$ (recuerdese que $\delta \leq \delta_j$, $j = 1, 2$) se tiene

$$\begin{aligned}|L_1 - L_2| &= |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \\ &\leq |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < 2\varepsilon = |L_1 - L_2|\,,\end{aligned}$$

pero $|L_1 - L_2| < |L_1 - L_2|$ contradice tricotomía, así $L_1 \neq L_2$ es falso y por tanto $L_1 = L_2$. $\square$

Dada la unicidad del límite se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

para representar al límite de f en a, cuando éste existe.

Proposición 3.2.3 *Sean $p, q \in \mathbb{R}$ con $p \neq 0$ y sea $D \subset \mathbb{R}$ un conjunto con $a \in \mathbb{R}$ como punto de contacto. La función $T_{p,q} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto px + q$ tiene límite $pa + q$ en a. Las funciones de este tipo son llamadas* transformaciones afines.

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Ahora bien

$$|T_{p,q}(x) - (pa + q)| = |p(x - a)| = |p||x - a|\,,$$

con lo cual se ve que bastará tomar $\delta = \varepsilon/|p|$; en efecto, si $x \in D$ satisface $0 < |x - a| < \delta$ entonces

$$|T_{p,q}(x) - (pa + q)| = |p||x - a| < |p|\left(\frac{\varepsilon}{|p|}\right) = \varepsilon.$$

$\square$

Debe observarse que no se ha escrito $T_{p,q}(a)$ para el valor $pa + q$ (cosa que el lector pudo estar tentado a hacer) pues puede ser que $a \notin D$.

A manera de ejemplo se consideran a continuación algunos límites básios pero importantes.

Ejemplo 3.2.4 *Sea $D \subset \mathbb{R}$ y sea $a \in \mathbb{R}$ punto de contacto de D.*

*a) La **función identidad** $\mathbb{1}_D : D \longrightarrow D$, dada por $x \mapsto x$, tiende a $a \in \mathbb{R}$ cuando x tiende a a.*

*b) La **función de valor absoluto** $abs : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$, tiende a $|a|$ cuando x tiende a a.*

*c) Para $c \in \mathbb{R}$, la **función constante** $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto c$, tiende a c cuando x tiende a a.*

Cada una de las pruebas es sencilla: Para $a)$ basta observar que $\mathbb{1}_D$ es una transformación afín: $\mathbb{1}_D = T_{1,0}$.
Para $b)$, sea $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \varepsilon > 0$. Ahora bien, para $x \in D$ con $0 < |x - a| < \delta$ se tiene

$$\Big| abs(x) - |a| \Big| = \Big| |x| - |a| \Big| \underset{\textit{Ejer.1.4.15}}{\leq} |x - a| < \varepsilon\,.$$

Para $c)$ no debe cometerse el error de escribir f como $T_{0,c}$ pues $T_{0,c}$ no tiene sentido (vea la definición de transformación afín y diga por qué). Para $\varepsilon > 0$, se puede tomar cualquier $\delta > 0$, por ejemplo, sea $\delta = 1$. Esta δ en efecto funciona: dado $x \in D$ con $0 < |x - a| < 1$ se tiene que

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

Es momento de dar un ejemplo para el cual no exista el límite.

Ejemplo 3.2.5 (Función de Dirichlet) *Sea* $D : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *la función dada por*

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Se verá que no existe $\lim_{x \to a} D(x)$ *para ningún* a*. Si se supone por el contrario que existiera dicho límite para algún* a *y su valor es* $L \in \mathbb{R}$*, es decir* $\lim_{x \to a} D(x) = L$*, entonces para* $\varepsilon := \frac{1}{2} > 0$*, existe* $\delta > 0$ *de tal modo que si* $0 < |x - a| < \delta$ *entonces* $|D(x) - L| < \frac{1}{2}$*.*
Como $\mathbb{Q}$ *y* $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ *son conjuntos densos en* $\mathbb{R}$ *existen* $r \in \mathbb{Q}$ *y* $y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *con* $r, y \in (a - \delta, a)$*, así* $0 < |r - a| < \delta$ *y* $0 < |y - a| < \delta$ *de donde*

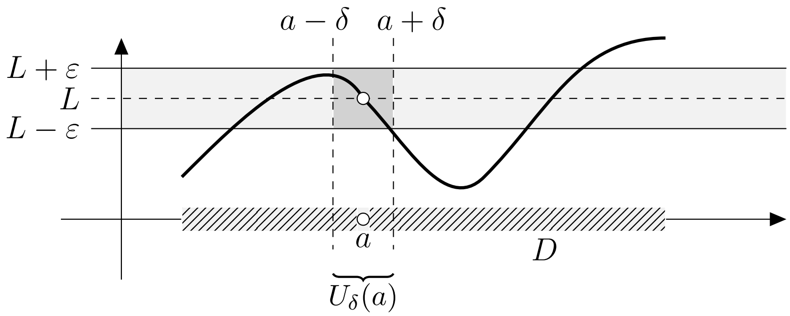
$$|D(r) - L| < \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad |D(y) - L| < \frac{1}{2}.$$

Ahora bien

$$\begin{aligned} 1 = |1 - 0| &= |D(r) - D(y)| \\ &= |D(r) - L + L - D(y)| \\ &\leq |D(r) - L| + |L - D(y)| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

lo cual es un absurdo. Se concluye por lo tanto que no puede existir $L = \lim_{x \to a} D(x)$*.*

Ya que se tienen a mano un par de ejemplos concretos, es bueno reflexionar en general el concepto de límite. La idea geométrica del límite de una función es muy similar al de límite de una sucesión. A continuación está un dibujo en el que el lector debe, a manera de ejercicio, interpretar la noción de límite (compare la explicación dada en el caso análogo de sucesiones, capítulo 2).



Cuando $a \in D$ pero a no es punto de contacto de D (en este caso se dice que a es un *punto aislado* de D) es conveniente definir $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ como se hace a continuación.

Definición 3.2.3 *Sea $a \in D$ y sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dada. Si a* ***no*** *es punto de contacto de D se define $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ como $f(a)$.*

La definición anterior es para completar un asunto meramente formal: Se puede estudiar el límite cuando x tiende a a de $f(x)$ para *cualquier* punto a del dominio de f, e incluso para puntos no en su dominio pero que sean de contacto.

Una sucesión convergente es acotada, de modo análogo, una función con límite en $a \in \mathbb{R}$ debe ser *localmente acotada*, el significado preciso de ésto está en el siguiente resultado.

Proposición 3.2.4 *Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y sea $a \in \mathbb{R}$ un punto de contacto para D. Si existe $L = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ entonces existe $M \geq 1 + |L| > 0$ tal que M es una cota local de f, es decir, existe $\delta > 0$ de tal modo que para toda $x \in U_\delta(a) \cap D$ se tiene $|f(x)| < M$.*

Demostración: Como existe $L = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ es posible encontrar $\delta > 0$ con la propiedad de que si $x \in D$, $0 < |x-a| < \delta$ entonces

$|f(x) - L| < 1$. Ahora bien,

$$|f(x)| \leq |f(x) - L| + |L| < 1 + |L|,$$

donde la última desigualdad es cierta si $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$. Para terminar la prueba, si $a \notin D$ se define $M := 1 + |L|$ y si $a \in D$ se define $M := 1 + \max\{|L|, |f(a)|\}$. En ambos casos se tiene que $|f(x)| < M$ para toda $x \in U_\delta(a) \cap D$. $\square$

Lo anterior da un criterio para decir cuándo un límite no existe, a continuación un ejemplo de esto.

Ejemplo 3.2.6 *Sea $a \in \mathbb{R}$ arbitrario y sea $f : \mathbb{R} - \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/(x - a)$ (grafique la función). No existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. En efecto, si se supone que exite el límite y que este fuera L, entonces de la proposición 3.2.4 debería existir $M > 0$ y $\delta > 0$ de tal forma que si $x \in U_\delta(a) - \{a\}$ entonces $|f(x)| < M$.*
Usando la propiedad arquimediana se puede encontrar un natural $n \in \mathbb{N}$ de tal forma que $1/n < \min\{\delta, \frac{1}{M}\}$. Ahora bien, observe que $a + 1/n \in U_\delta(a) - \{a\}$ pero

$$f\left(a + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\left(a + \frac{1}{n}\right) - a} = \frac{1}{1/n} = n > M$$

lo cual contradice la hipótesis sobre M. Se concluye que el límite en cuestión no puede existir.

3.2.3. Propiedades aritméticas

Lo que corresponde ahora es demostrar las propiedades aritméticas de límites de funciones. A este resultado haremos referencia como PA-LF.

Teorema 3.2.1 (Propiedades aritméticas de límites de funciones) *Sean $a \in \mathbb{R}$ un punto de contacto de $D \subset \mathbb{R}$ y sean $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$. Se tiene entonces que existen también los siguientes límites y además se dan las igualdades correspondientes.*

a) $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$.

b) $\lim_{x\to a}(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda \lim_{x\to a} f(x) + \mu \lim_{x\to a} g(x)$.

c) $\lim_{x\to a}(fg)(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$.

d) $\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{g}\right)(x) = 1/\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$ *siempre que* $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

e) $\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right) / \left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$*, siempre que* $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Demostración: Las pruebas son esencialmente las mismas que las de las PA-SC, se sugiere al lector repasar dichas pruebas e imitarlas para practicar el concepto de límites de funciones. De todos modos se dará la demostración de $c)$ para que se pueda corroborar que las ideas son efectivamente las mismas que en el caso de sucesiones.
Prueba de $c)$: Sean $L = \lim_{x\to a} f(x)$ y $M = \lim_{x\to a} g(x)$. Se quiere demostrar que $LM = \lim_{x\to a}(fg)(x)$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
|(fg)(x) - LM| &= |f(x)g(x) - f(x)M + f(x)M + LM| \\
&= |f(x)(g(x) - M) + M(f(x) - L)| \\
&\leq |f(x)||g(x) - M| + |M||f(x) - L|.
\end{aligned}$$

La desigualdad

$$|(fg)(x) - LM| \leq |f(x)||g(x) - M| + |M||f(x) - L| \tag{3.1}$$

da la clave de como proceder. Sea $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ con $|f(x) - L| < \varepsilon/(|M| + 1)$ siempre que $x \in D$ con $0 < |x - a| < \delta_1$. También se sabe que existe una constante $M_2 > 0$ ($M_2 \geq 1 + |L|$ pero esto no se usará ahora) y un $\delta_2 > 0$ tales que $|f(x)| < M_2$ para cualquier $x \in U_{\delta_2}(a) \cap D$ (proposición 3.2.4). También se puede encontrar $\delta_3 > 0$ con $|g(x) - M| < \varepsilon/2M_2$ siempre que $x \in D$ cumpla $0 < |x - a| < \delta_3$.
Sea ahora $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Esta $\delta > 0$ funciona, en efecto, para $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta \leq \delta_j$ ($j = 1, 2, 3$), se tiene $x \in U(\delta_2) \cap D$ y

$$\begin{aligned}|(fg)(x) - LM| &\underset{(3.1)}{\leq} |f(x)||g(x) - M| + |M||f(x) - L| \\ &< M_2\left(\frac{\varepsilon}{2M_2}\right) + |M|\frac{\varepsilon}{2(|M| + 1)} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \left(\frac{|M|}{|M| + 1}\right)\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad usó $\frac{|M|}{|M|+1} < 1$.
No se demostrará $d)$ (ni los demás incisos) pero sí se quiere comentar que la expresión $1/g(x)$ tiene sentido localmente cerca de a, es un hecho análogo al resultado de la preservación del signo lo que está detrás.

□

Teorema 3.2.2 (Preservación del signo) *Sea $a \in \mathbb{R}$ un punto de contacto para D y sea $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \to a} g(x) = L \neq 0$. Exsite entonces $\delta > 0$ de tal forma que $|g(x)| > |L|/2$ para toda $x \in U_\delta \cap [D - \{a\}]$, más aún el signo de $g(x)$ y de L es el mismo en dicha región.*

Demostración: Sólo se demostrará el caso $L > 0$, siendo el otro caso análogo. Para el positivo $L/2$ existe $\delta > 0$ de tal modo que

$|g(x) - L| < L/2$ siempre que $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$. Esta δ funciona: si $x \in U_\delta(a) \cap [D - \{a\}]$ entonces

$$L/2 > |g(x) - L| \geq L - g(x)$$

de donde $g(x) > L/2 > 0$ si $x \in U_\delta(a) \cap [D - \{a\}]$. $\square$

Un ejemplo del uso de las PA-LF se da a continuación .

Ejemplo 3.2.7 *Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $x \mapsto \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \textit{si } x \neq 1 \\ 3 & \textit{si } x = 1 \end{cases}$.
Se tiene que $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 1/2$*, en efecto, para* $x \neq 1$ *se tiene*

$$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

y $g(x) = x + 1$ *es transformación afín (vea la prop. 3.2.3) y por lo tanto* $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 1(1)+1 = 2 \neq 0$. *Usando ahora PA-LF se concluye entonces que*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

El ejemplo anterior es muy importante, pues entre otras cosas muestra que *tomar límite* y *evaluar* **no** son lo mismo; en el ejemplo anterior se tiene

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2} \neq 3 = f(1).$$

En el caso de las transformaciones afines sin embargo, se puede *evaluar* la regla de asignación para encontrar el límite. El determinar cuándo resulta lo mismo evaluar que tomar límite, es el tema del capítulo sobre *teoría de funciones continuas*. Por ahora se quiere sólo remarcar el hecho de que en general no debe cometerse el error de querer evaluar únicamente el valor del límite, cosa que de hecho muchas veces no tiene ni sentido; esto también lo ilustra el ejemplo anterior pues en $(x-1)/(x^2-1)$ no es posible tomar $x=1$ (produciría división por 0). Se sugiere al lector realizar la gráfica de dicha función.

3.2.4. Ejercicios.

Ejercicio 3.2.1 *Demuestre que efectivamente $U_\delta(a) \subset U_\varepsilon(a) \cap (0,1)$ en el ejemplo 3.2.2.*

Ejercicio 3.2.2 *Sean $a<b$.*

- *Generalice el ejemplo 3.2.2 mostrando que para el intervalo abierto (a,b) cualquiera de sus puntos es punto de contacto para (a,b).*
- *Muestre que a y b son puntos de contacto tanto para (a,b) como para $[a,b]$.*

Ejercicio 3.2.3 *Si $D \subset \mathbb{R}$ es un conjunto finito, ¿qué puede decirse sobre el conjunto de puntos de contacto de D?*

Ejercicio 3.2.4 *De un ejemplo en donde $\sup(D) \in \mathbb{R}$ no sea punto de contacto para el conjunto D.*

Ejercicio 3.2.5 *Suponga que $D \subset \mathbb{R}$ contiene una sucesión de puntos distintos de $a \in \mathbb{R}$ convergiendo a a y distintos entre sí. Demuestre que a es punto de contacto de D.*

Ejercicio 3.2.6 *Utilizando la notación del ejercicio 1.5.12: Demuestre que si 0 es punto de contacto de D entonces también es punto de contacto para $M_k[D]$ para cualquier $k \neq 0$.*

Ejercicio 3.2.7 *Sea* $D \subset \mathbb{R}_+$ *y sea* $r[D] := \{1/d : d \in D\}$. *Demuestre que* 0 *es punto de contacto de* D *si y solo si* $r[D]$ *no es un conjunto acotado superiormente.*

Ejercicio 3.2.8 *Demuestre utilizando la definición* $\varepsilon - \delta$ *las PA-LF (teorema 3.2.1).*

3.3. Equivalencia de límite de funciones por sucesiones

El lector habrá observado que las pruebas hasta ahora son esencialmente las mismas que en el caso de sucesiones. A continuación se dará uno de los teoremas más importantes de esta obra, que harán entender de manera más profunda al lector, el por qué de dicha similitud.

Teorema 3.3.1 (Equivalencia de límites por límites de sucesiones) *Sea* $a \in \mathbb{R}$ *un punto de contacto de* $D \subset \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ *y sea* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

b) Para toda sucesión $(d_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D - \{a\}$ *que converge a* a *se tiene que la sucesión de imágenes* $(f(d_n))_{n \in \mathbb{N}}$ *converge a* L.

Demostración: La existencia de sucesiones $(d_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D - \{a\}$ convergiendo a a se garantiza por la proposición 3.2.1.

$\boxed{a) \Rightarrow b)}$ Sea $(d_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D - \{a\}$ una sucesión convergiendo a a. Se quiere mostrar que $(f(d_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a L, sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ existe $\delta > 0$ de tal modo que si $x \in D$, $0 < |x - a| < \delta$

entonces $|f(x)-L| < \varepsilon$. Como $d_n \longrightarrow a$, para esta $\delta > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ de tal forma que si $n \geq N$ entonces $|d_n - a| < \delta$. Se tiene ahora la siguiente cadena de implicaciones, la cual termina la prueba de que $f(d_n) \longrightarrow L$

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad d_n \in D\,, 0 < |d_n - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(d_n) - L| < \varepsilon.$$

$\boxed{b) \Rightarrow a)}$ Se probará la contrarrecíproca. Se sugiere al lector prestar atención a la *negación* del límite (un ejercicio de lógica y cuantificadores universales).

Sea $L \neq \lim\limits_{x \to a} f(x)$. Existe por lo tanto algún $\varepsilon_0 > 0$ con la siguiente propiedad: para toda $\delta > 0$ existe $x_\delta \in D$ con $0 < |x_\delta - a| < \delta$ y tal que $|f(x_\delta) - L| \geq \varepsilon_0$. En particular, para $1/n > 0$ es posible encontrar $d_n \in D$, $0 < |d_n - a| < 1/n$ con $|f(d_n) - L| \geq \varepsilon_0$. Observe que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a pero $(f(d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a L (vea ejercicio 3.3.1).

□

Con el teorema anterior se puede dar otra demostración, evitando $\varepsilon - \delta$ de varios de los resultados citados antes. A manera de ejemplo se demostrará ahora el caso de la suma en las PA-LF:

Sean $L = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $M = \lim\limits_{x \to a} g(x)$. Se quiere demostrar $\lim\limits_{x \to a}(f + g)(x) = L + M$, para esto sea $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D - \{a\}$ una sucesión de tal forma que $d_n \longrightarrow a$. Por la parte $a) \Rightarrow b)$ del teorema 3.3.1 se tiene que $f(d_n) \longrightarrow L$ y $g(d_n) \longrightarrow M$; de las PA-SC se tiene que $(f + g)(d_n) = f(d_n) + g(d_n) \longrightarrow M + N$. Como $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es arbitraria, se sigue de la parte $b) \Rightarrow a)$ del teorema 3.3.1 que $\lim\limits_{x \to a}(f + g)(x) = L + M$.

La manera de proceder utilizando sucesiones para analizar el lími-

te de una función es a la que se le dará preferencia en muchas partes este texto; se sugiere al lector ir comparando con la literatura clásica los tipos de pruebas para tener ambas visiones.
A continuación se da un ejemplo concreto de cómo utilizar la equivalencia por sucesiones en el límite.

Ejemplo 3.3.1 (Función de Gauss) *Sea* $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *la función dada por* $G(x) = [\![x]\!]$ *(haga la gráfica de la función). Para cada* $a \in \mathbb{Z}$ *se tiene que no existe* $\lim\limits_{x \to a} G(x)$*. En efecto, si existiera dicho límite y fuera* $L \in \mathbb{R}$*, entonces por el teorema 3.3.1 se tendría que* $G(d_n) \longrightarrow L$ *(mismo límite), para toda sucesión* $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} - \{a\}$ *que converge a* a*. Ahora bien, las sucesiones* $(a - \frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(a + \frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ *son ambas convergentes al punto* a *y* $G(a - \frac{1}{n+1}) \longrightarrow a - 1$*,* $G(a + \frac{1}{n+1}) \longrightarrow a$ *(son de hecho sucesiones constantes). Esto es absurdo pues entonces* $a - 1 = L = a$*.*

La técnica del ejemplo anterior es muy útil para demostrar que un límite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no existe: Encontrar dos sucesiones $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ del dominio D de f que converjan a a pero tales que las sucesiones de imágenes $(f(c_n))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(f(d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converjan a diferentes valores (o incluso alguna diverja).

3.3.1. Sobre monotonía.

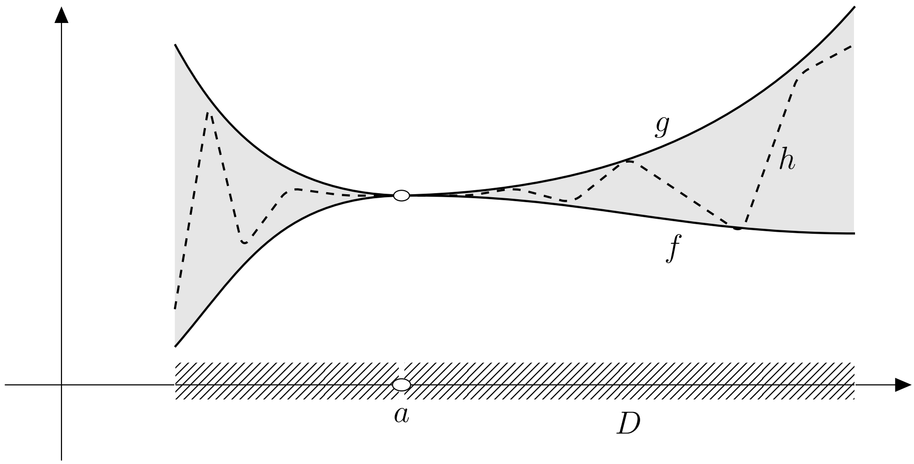
A continuación se da una serie de resultados, sin su demostración, dejando estas como ejercicio para el lector. Todas ellas siguen utilizando el teorema 3.3.1 en combinación con los resultados del capítulo 2 sobre sucesiones.

Teorema 3.3.2 *Sea $a \in \mathbb{R}$ punto de contacto para $D \subset \mathbb{R}$ y sean $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que existen los límites $L = \lim_{x \to a} f(x)$ y $M = \lim_{x \to a} g(x)$.*

- ***(Monotonía al límite)** Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in D - \{a\}$ entonces $L \leq M$.*

- ***(Ley del sándwich)** Si $L = M$ entonces para cualquier función $h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaciendo que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo $x \in D - \{a\}$ se tiene que $\lim_{x \to a} h(x) = L$.*

La ley del sándwich corresponde a la ley de estricción en sucesiones, pese a que se les suele llamar igual, aquí se mantendrá el nombre diferente para enfatizar cuando se trata de uno o del otro caso. Se deja a continuación un dibujo para aclarar la situación de la ley del sándwich.



3.3.2. Función de Thomae.

Finalemente, el capítulo termina ahora con una función que es importante para dar contraejemplos, *rompe* un poco con la intuición en el caso de continuidad y es muy útil en integración.

Definición 3.3.1 *La función de Thomae* $T : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *se define mediante* $T(x) = 0$ *si* $x \notin \mathbb{Q}$ *y* $T(n/m) = 1/m$ *si el racional* n/m *está escrito de forma simplificada (i.e. no hay divisores comunes entre* n *y* m*),* $T(0) := 1$.

Se recomienda en este punto al lector que haga la gráfica de la función de Thomae (a veces también llamada función campana).

Proposición 3.3.1 *Si* $T : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es la función de Thomae y* $a \in [0,1]$ *entonces* $\lim\limits_{x \to a} T(x) = 0$.

Demostración: Para facilitar la prueba se introducen a continuación los siguientes conjuntos:

$$D_n := \{j/n : j \in \mathbb{Z}\,, 0 \leq j \leq n\} \quad \text{y} \quad F_n := \bigcup_{j=1}^{n} D_j$$

donde $n \in \mathbb{N}$. En F_n se recolectan todos los racionales $x \in [0,1]$ con denominador menor o igual a n en su forma reducida.
Sea $a \in [0,1]$, dado $\varepsilon > 0$ se puede encontrar $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, con $1/N < \varepsilon$. Observe que el conjunto $T_\varepsilon := \{x \in [0,1] : T(x) \geq \varepsilon\}$ (que puede ser un conjunto vacío, por ejemplo cuando $\varepsilon > 1$) está contenido en F_{N-1}. Como el conjunto F_{N-1} es finito así lo es $T_\varepsilon \subset F_{N-1}$. Sea

$$\delta := \begin{cases} \min\{|t-a| : t \neq a, t \in T_\varepsilon\} & \text{si} \quad T_\varepsilon \neq \emptyset \\ 1 & \text{si} \quad T_\varepsilon = \emptyset \end{cases}$$

en el primer caso, $\delta > 0$ es la mínima distancia a los elementos de $T_\varepsilon - \{a\}$. Esta δ funciona; en efecto, si $x \in U_\delta(a) \cap ([0,1] - \{a\})$

entonces como $|x-a| < \delta \leq |t-a|$ para todo $t \in T_\varepsilon - \{a\}$ se sigue que $x \notin T_\varepsilon - \{a\}$ con lo que $T(x) < \varepsilon$ y así $|T(x) - 0| < \varepsilon$ siempre que $x \in U_\delta(a) \cap ([0,1] - \{a\})$. □

3.3.3. Ejercicios

Ejercicio 3.3.1 *Complete la demostración de la parte b) en el teorema 3.3.1 mostrando que la sucesión construida* $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *efectivamente converge a* a *y es tal que* $(f(d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* L.

Ejercicio 3.3.2 *Demuestre que para toda* $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $\lim_{x\to a} [\![x]\!] = [\![a]\!]$.

Ejercicio 3.3.3 *Sea* $f : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $x \mapsto \sqrt{x}$ *y sea* $a \in \mathbb{R}$ *punto de contacto de* $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. *Demuestre las siguientes afirmaciones.*

- *Se tiene que* $a \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.
- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, *es decir* $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.

Ejercicio 3.3.4 *Sea* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función no negativa,* a *es punto de contacto de* D. *Suponga que el límite* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *existe. Demuestre que* $\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

Ejercicio 3.3.5 *Sean* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, a *punto de contacto de* D *y* $k, L \in \mathbb{R}$. *Suponga que para toda* $x \in D - \{a\}$ *se cumple que* $|f(x) - L| \leq k|x-a|$. *Demuestre, utilizando directamente la definición* $\varepsilon - \delta$, *que* $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

Ejercicio 3.3.6 *Muestre que* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *si y solo si* $\lim_{x\to a}(f(x) - L) = 0$ *si y solo si* $\lim_{x\to a} |f(x) - L| = 0$.

Ejercicio 3.3.7 *Demuestre que existe el siguiente límite y calcule su valor*

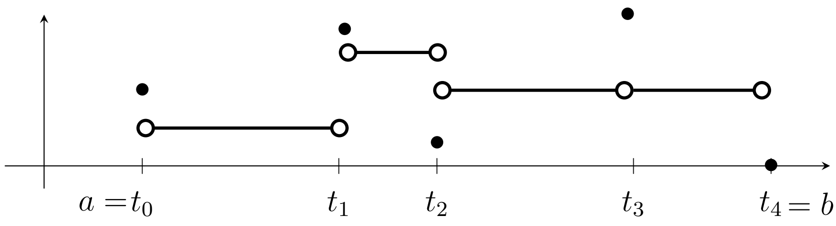
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{x}.$$

Ejercicio 3.3.8 *¿Puede existir* $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x^2-1}$*? Explique.*

El siguiente ejercicio es muy útil en la práctica, pues permite hacer cambios lineales de variable.

Ejercicio 3.3.9 *Sea* $D \subset \mathbb{R}$ *un conjunto que tiene a* 0 *como punto de contacto. Sea* $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ *una constante y* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función tal que existe* $L = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$*. Defina* $f^* : M_{1/k}[D] \longrightarrow \mathbb{R}$ *mediante* $f^*(x) = f(kx)$ *(vea el ejercicio 3.2.6). Demuestre que* $\lim\limits_{x\to 0} f^*(x) = L$*, es decir* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(kx)$*.*

Ejercicio 3.3.10 *Sean* $a < b$ *números dados. Se dice que una función* $E : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una* función escalonada *si existe una colección finita de puntos* $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ *(llamada* partición de $[a,b]$*) y constantes* $c_1, c_2, \cdots, c_n$ *de tal forma que la restricción* $E|_{(t_{j-1},t_j)}$ *es la función constante* c_j *y si para algún* j *se tiene* $c_{j-1} = c_j$ *entonces* $E(t_j) \neq c_j$*.*



Para una función escalonada $E : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *con partición* $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ *demuestre lo siguiente.*

- *Existen ambos límites* $\lim\limits_{x\to a} E(x)$ *y* $\lim\limits_{x\to b} E(x)$*.*

- *Para* $1 \leq j < n$ ***no existe el límite*** $\lim_{x \to t_j} E(x)$ ***a menos que*** $c_j = c_{j+1}$.
- ***Si*** $t \in [a,b] - \{t_j : j = 0, 1, \cdots, n\}$ ***entoces*** $\lim_{x \to t} E(x) = E(t)$.

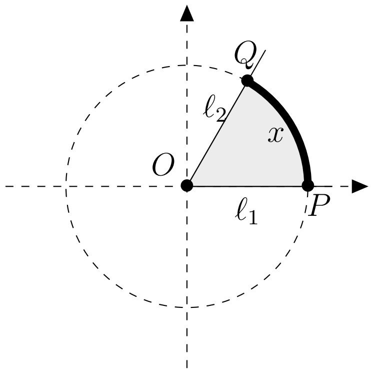
Ejercicio 3.3.11 *Sea a punto de contacto de $D \subset \mathbb{R}$ y sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función para la cual existe $M > 0$ de tal forma que $|f(x)| \leq M$ para toda $x \in D - \{a\}$. Para cualquier función $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ se tiene que $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.*
Dé ejemplos concretos de f y g para mostrar que si se quita la hipótesis sobre M (i.e. que no exista tal M) entonces puede tenerse $\lim_{x \to a} f(x)g(x) \neq 0$.
Algunos casos particularmente útiles en la práctica son
$g(x) = x^n - a^n$, $n \in \mathbb{N}$, y $g(x) = |x - a|$.
Sugerencia: *En la primera parte use la ley del sándwich.*

Ejercicio 3.3.12 *Demuestre que* $\lim_{x \to 0} \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| = 0$.

3.4. Un par de límites especiales

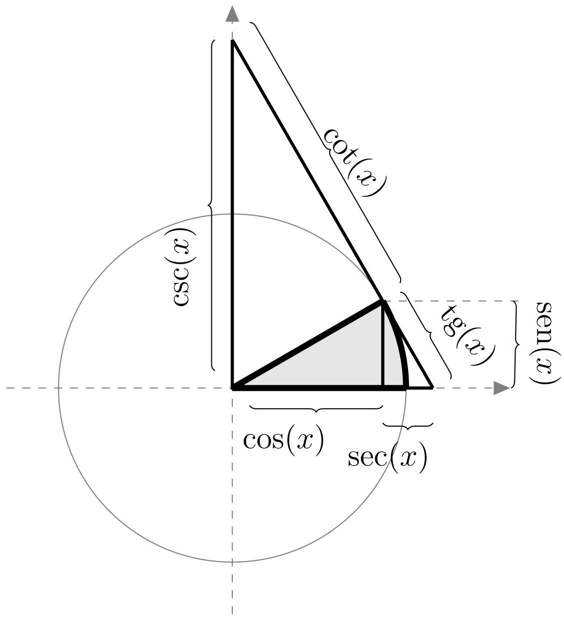
En esta sección se calcularán algunos límites especiales. Algunos de ellos requieren cierto entendimiento geométrico de las funciones involucradas (como las trigonométricas); se empezará por tanto, con un repaso rápido de algunas cosas de geometría, precisando el concepto de *ángulo*, que de modo impreciso se nos presenta en la educación básica como *la abertura* entre dos rectas que se cruzan en un punto, el vértice. Se utilizará el hecho geométrico de que la longitud de una circunferencia de radio 1 es π (≈ 3.141592653).

Definición 3.4.1 *Dado un par de rayos ℓ_1 y ℓ_2 que se cortan en un punto O, situado en el origen del plano coordenado y una recta sobre el eje X (ver la figura a la derecha), se define el ángulo x, medido en radianes, entre ellas como la longitud de arco PQ del círculo unitario centrado en O (recorrido en sentido antihorario).*



El ángulo negativo es de la misma magnitud que el positivo pero recorrido en sentido horario.

El seno, coseno y demás razones trigonométricas se definen de manera usual. A continuación se tiene un dibujo que interpreta de modo geométrico dichas razones. Es un buen ejercicio para el lector verificar que las longitudes de los segmentos son precisamente lo que se indica (en el caso en que el ángulo es agudo).



No debe olvidarse que esta figura es sólo para cuando el ángulo está entre 0 y $\pi/2$ (agudo). Usando segmentos dirigidos se puede tener tanto el seno como el coseno (y con esto y las relaciones entre ellos todas las demás) definidos para $x \in [0, 2\pi]$. Por último todas estas funciones se extienden a todo $\mathbb{R}$ de forma que sean 2π-periódicas: $\operatorname{sen}(x \pm 2\pi) = \operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x \pm 2\pi) = \cos(x)$.

Se finaliza este repaso de geometría con el siguiente resultado.

Proposición 3.4.1 *Se tienen las siguientes:*

a) Para cualquier ángulo $x \in [0, 2\pi]$ se tiene que el área del sector circular determinado por x es $x/2$.

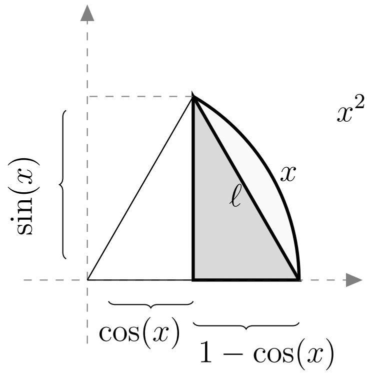
b) Para toda $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ se tiene que $|1 - \cos(x)| \leq x^2/2$.

c) Para toda $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ se tiene que $|\sin(x)| \leq |x|$.

Demostración: Las demostraciones son meramente geométricas, se usará en algunos puntos en particular que *el camino más corto entre dos puntos es el segmento de recta que los une.*

a) Esta es una cuestión de proporciones (regla de tres) entre la longitud de arco y el área barrida: Si $A(x)$ es el área del sector circular en cuestión entonces $x/2\pi = A/\pi$.

b) Si ℓ es la longitud de la hipotenusa del triángulo sombreado de gris entonces $x \geq l$. Ahora se aplicará esta desigualdad y el teorema de Pitágoras a dicho triángulo



$$\begin{aligned} x^2 \geq l^2 &= \sin^2(x) + (1-\cos(x))^2 \\ &= \sin^2(x) + 1 - 2\cos(x) + \cos^2(x) \\ &= 2 - 2\cos(x) = 2(1-\cos(x)) \\ &= 2|1-\cos(x)| \end{aligned}$$

en donde en la segunda igualdad se ha aplicado que $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ (que en la figura es nuevamente una aplicación del teorema de Pitágoras al triángulo no sombreado) y en la última igualdad que $\cos(x) \leq 1$. Se concluye que $\frac{x^2}{2} \geq |1-\cos(x)|$.

c) Se puede utilizar aquí la misma figura y notación del inciso anterior. Se tiene que $\ell \geq |\sin(x)|$ pues la hipotenusa es el mayor de los lados en un triángulo rectángulo, como $|x| \geq \ell$ se concluye $|x| \geq |\sin(x)|$. $\square$

El lector astuto habrá observado que solo analizamos en la prueba el caso $x \geq 0$, sin embargo el caso $x < 0$ se obtiene de manera análoga al reflejar la figura respecto al eje X.

3.4.1. El límite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x}$.

De la parte $b)$ de la proposición 3.4.1 se tiene

$$0 \leq \left| \frac{1-\cos(x)}{x} - 0 \right| = \frac{|1-\cos(x)|}{|x|} \leq \frac{|x|}{2}$$

de donde al usar la ley del sándwich (teorema 3.3.2) o directamente la definición $\varepsilon - \delta$ se concluye que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0.$$

Se escribe esto como un teorema.

Teorema 3.4.1 *Se tienen*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0.$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1.$

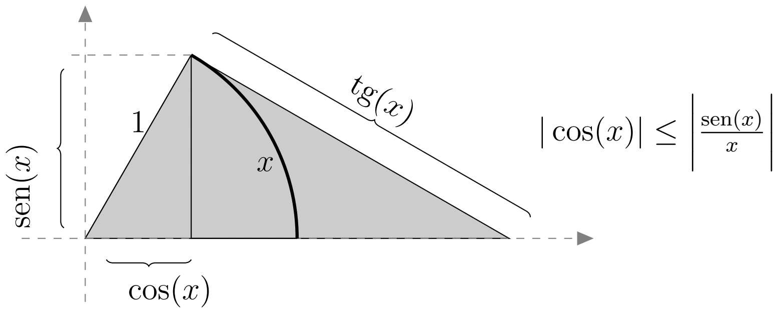
Demostración: Solo queda $b)$ por ser demostrado, éste es una consecuencia de la parte $a)$ y las PA-LF aplicadas a

$$\cos(x) = 1 - x\left(\frac{1-\cos(x)}{x}\right)$$

$\square$

3.4.2. El límite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$.

En la siguiente figura se puede observar que el área del sector circular determinado por el ángulo x, que según la proposición 3.4.1 es $|x|/2$, es menor o igual al área del triángulo sombreado, que es $(1/2)(1)(|\operatorname{tg}(x)|) = (1/2)|\sin(x)|/|\cos(x)|$, de donde $|x|/2 \leq (1/2)|\sin(x)|/|\cos(x)|$ y por tanto $|\cos(x)| \leq |\operatorname{sen}(x)/x|$. Esta desigualdad es clave para la demostración del siguiente teorema.



El cálculo del límite, que da el título a esta sección, requerirá de otro hecho (bien conocido) de la geometría, la fórmula de ángulo doble para el coseno:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x). \tag{3.2}$$

Teorema 3.4.2 *Se tienen*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x)/x = 1.$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = 0.$

Demostración: Claramente $b)$ es consecuencia de $a)$ usando las PA-LF y

$$\sin(x) = x\left(\frac{\sin(x)}{x}\right),$$

por lo que basta que se demuestre ahora $a)$.

Para $|x| < \pi$ se tiene que $|x/2| < \pi/2$ y así por $c)$ de la proposición 3.4.1 se sigue que $|x/2| \geq |\sin(x/2)|$ de donde al tomar cuadrados se obtiene

$$\frac{x^2}{4} \geq \sin^2(x/2) \underset{(3.2)}{=\!=} \left|\frac{1-\cos(x)}{2}\right|,$$

en donde se ha utilizado (3.2) en $\cos(x) = \cos(2(x/2))$. Se sigue entonces que

$$\frac{x^2}{2} \geq 1 - \cos(x) \geq 1 - |\cos(x)|$$

con lo cual se vale

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq |\cos(x)| \tag{3.3}$$

siempre que $|x| < \pi$. Todo lo anterior se conjunta en lo siguiente (válido para $0 < |x| < \pi/2$):

$$1 \underset{c)\text{prop.3.4.1}}{\geq} \left|\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right| \geq |\cos(x)| \underset{(3.3)}{\geq} 1 - \frac{x^2}{2}$$

Ahora bien, para $0 < |x| < \pi/2$ el signo de $\operatorname{sen}(x)$ y el de x es el mismo, por lo que $\operatorname{sen}(x)/x \geq 0$ y entonces la desigualdad anterior muestra que de hecho que

$$1 \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Ahora solo es cuestión de aplicar PA-LF y la ley del sándwich a las desigualdades anteriores.

$\square$

3.4.3. El límite $\lim\limits_{x\to 0}(a^x - 1)/x$

Sea $a > 1$, en el teorema 2.5.3 se demostró que

$$L_a := \lim_{n\to\infty} n(a^{1/n} - 1)$$

existe. Esto será clave para calcular el límite que da título a esta sección. Se comienza con el siguiente lema técnico.

Lema 3.4.1 *Sea $a > 1$ y sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números positivos convergente a cero. Se tiene que la sucesión $\left(\frac{a^{z_n}-1}{z_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L_a.*

Demostración: Sean $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ las sucesiones dadas por $b_n := n(a^{1/n} - 1)$, $c_n := a^{1/n} - 1$ y $x_n := b_n + c_n$, $y_n := b_n - c_n$.
Usando los teoremas 2.3.1, 2.5.3 y las PA-SC se tiene que $c_n \longrightarrow 0$ y que tanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son ambas convergentes a L_a. Observe también que

$$x_n = (n+1)(a^{\frac{1}{n}} - 1) \qquad \text{y} \qquad y_{n+1} = n(a^{\frac{1}{n+1}} - 1)\,. \tag{3.4}$$

Ahora sí, ya se está listo para demostrar el límite de interés. Sea $\varepsilon > 0$, se puede elegir $N_1 \in \mathbb{N}$ de tal forma

$$|x_n - L_a| < \varepsilon \quad \text{y} \qquad |y_n - L_a| < \varepsilon \tag{3.5}$$

siempre que $n \geq N$. Sea $N \in \mathbb{N}$, $N \geq N_1$, de tal forma que si $n \geq N$ entonces $|z_n| < \varepsilon$. Esta N funciona: Sea $n \geq N$, se puede tomar $m \in \mathbb{N}$ de tal manera que $0 < 1/(m+1) < z_n < 1/m$ (m depende de n y $m \geq n \geq N$). Usando el ejercicio 2.7.4 se puede ver que para esta m se tiene

$$\frac{a^{\frac{1}{m+1}} - 1}{1/m} \leq \frac{a^{z_n} - 1}{z_n} \leq \frac{a^{\frac{1}{m}} - 1}{1/(m+1)}$$

con lo cual

$$L_a - \varepsilon \underset{(3.5)}{<} y_{m+1} \underset{(3.4)}{=\!=} \frac{a^{\frac{1}{m+1}} - 1}{\frac{1}{m}} \leq \frac{a^{z_n} - 1}{z_n} \leq \frac{a^{\frac{1}{m}} - 1}{\frac{1}{m+1}} \underset{(3.4)}{=\!=} x_m \underset{(3.5)}{<} L_a + \varepsilon$$

de donde $|(a^{z_n} - 1)/z_n - L_a| < \varepsilon$. $\square$

Teorema 3.4.3 *Para* $a > 1$ *se tiene* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = L_a$.

Demostración: Se hará uso del teorema de equivalencia del límite por límite de sucesiones (teorema 3.3.1). Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ una sucesión convergente a 0 y sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{N}$ los conjuntos definidos a continuación

$$\mathcal{P} := \{n \in \mathbb{N} : z_n > 0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{N} := \{n \in \mathbb{N} : z_n < 0\}.$$

Hay tres posibles casos a considerar.

Caso 1: El conjunto $\mathcal{P}$ es finito (incluyendo vacío). En este caso existe $N \in \mathbb{N}$ de tal forma que $z_n < 0$ para toda $n \geq N$. Aquí basta observar que

$$\frac{a^{z_n} - 1}{z_n} = a^{z_n} \left(\frac{a^{-z_n} - 1}{-z_n} \right)$$

así que por las PA-SC, el lema 3.4.1 (pues $-z_n > 0$) y el ejercicio 2.7.1 se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{z_n} - 1}{z_n} = 1(L_a) = L_a.$$

Caso 2: El conjunto $\mathcal{N}$ es finito. Aquí existe $N \in \mathbb{N}$ de tal forma que $z_n > 0$ para toda $n \geq N$, el resultado es entonces una aplicación directa del lema 3.4.1.

Caso 3: Ambos $\mathcal{P}$ y $\mathcal{N}$ son infinitos. Se puede suponer entonces que $\mathcal{N} := \{n_1 < n_2 < \cdots\}$ y $\mathcal{P} = \{m_1 < m_2 < \cdots\}$. De los casos 1 y 2 se deduce que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a^{z_{n_k}} - 1}{z_{n_k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{a^{z_{m_k}} - 1}{z_{m_k}} = L_a\,.$$

Ahora bien, dado $\varepsilon > 0$ es posible encontrar $N_1 \in \mathbb{N}$ de tal forma que

$$\left| \frac{a^{z_{n_k}} - 1}{z_{n_k}} - L_a \right| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \left| \frac{a^{z_{m_k}} - 1}{z_{m_k}} - L_a \right| < \varepsilon$$

siempre que $k \geq N_1$. Sea $N = \text{máx}\{n_{N_1}, m_{N_1}\}$. Para $n \geq N$ se tiene $n \geq n_{N_1} \geq N_1$ y $n \geq m_{N_1} \geq N_1$ por lo que, independientemente de si $n \in \mathcal{P}$ o $n \in \mathcal{N}$, se tiene $\left|\frac{a^{z_n}-1}{z_n} - L_a\right| < \varepsilon$. $\square$

3.4.4. Ejercicios

Ejercicio 3.4.1 *Generalice el caso de 3 de la prueba del teorema 3.4.3: Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión dada y sean $\mathcal{A} := \{n_1 < n_2 < \cdots\}$, $\mathcal{B} = \{m_1 < m_2 < \cdots\}$ subconjuntos infinitos disjuntos de $\mathbb{N}$ y tales que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathbb{N}$.*
Demuestre que si ambas sucesiones $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ y $(a_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergen a un mismo valor L entonces la sucesión original $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también converge a L.

Ejercicio 3.4.2 *Sean $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$. Demuestre que existen cada uno de los siguientes límites y encuentre su valor.*

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(ax)}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ax}{\operatorname{sen}(ax)}$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ax}{\operatorname{sen}(bx)}$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^5(ax)}{bx^5}$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)}{bx}$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)}{\operatorname{sen}(bx)}$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(ax)}{bx^2}$.

Ejercicio 3.4.3 *Sea $0 < a < 1$. Demuestre que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = -L_{1/a}.$$

Ejercicio 3.4.4 (Definición de logaritmo) *Se define la función* logaritmo natural $\ln : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *mediante*

$$\ln(a) := \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}.$$

Es fácil ver que $\ln(1) = 0$, $\ln(a) = L_a$ *para* $a > 1$ *y* $\ln(a) = -L_{1/a} = -\ln(1/a)$ *para* $0 < a < 1$.

- *Demuestre que* $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ *y* $\ln(a^b) = b\ln(a)$.
- *Concluya que* $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$.
- *Demuestre que* $\ln(1/a) = -\ln(a)$.

Sugerencia: *En el primer punto: use PA-LF y el ejercicio 2.7.2; le puede ser de mucha utilidad el ejercicio 3.3.9.*

3.5. Límites y el símbolo ∞.

Se han considerado límites de funciones para el caso cuando la variable se acerca a un número real a (que debe ser punto de contacto de D o bien estar en D). ¿Qué pasa si ahora se deja crecer la variable x indefinidamente? Primero que nada, se necesitaría que f pueda evaluarse en valores muy grandes de x.

Definición 3.5.1 *Sea $D \subset \mathbb{R}$. Se dice que $+\infty$ es punto de contacto de D si D no es acotado superiormente. Se dice que $-\infty$ es punto de contacto de D si D no es acotado inferiormente.*

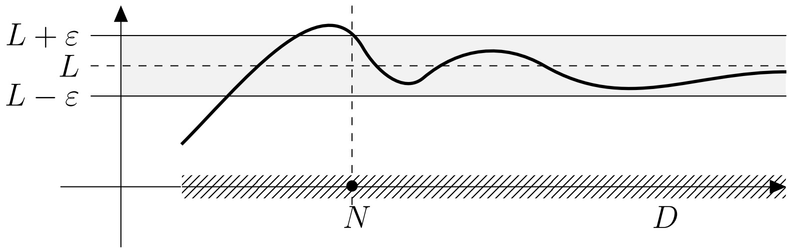
Los símbolos $\pm\infty$ no son números reales, pero la interpretación anterior sugiere que, en cuanto a orden se refiere, se tenga $-\infty < x < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

3.5.1. Límites al infinito

Definición 3.5.2 *Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y sea $L \in \mathbb{R}$. Suponga $+\infty$ es punto de contacto de D. Se escribe $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ si:*

para toda $\varepsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$x \in D, x > N \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon\,.$$



Es de observarse que para la existencia del límite anterior basta únicamente la información de f en el conjunto $D \cap \mathbb{R}_+$ por lo que muchos de los resultados serán enunciados para $D \subset \mathbb{R}_+$.

Ejemplo 3.5.1 *Sea* $n \in \mathbb{N}$ *y sea* $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *la función dada por* $f(x) = 1/x^n$. *Se tiene que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. *En efecto, dado* $\varepsilon > 0$ *sea* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $1/N < \varepsilon$ *(propiedad arquimediana). Claramente para* $x \in \mathbb{R}_+$, $x > N \geq \sqrt[n]{N}$, *se tiene que:*

$$|f(x) - 0| = \frac{1}{x^n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Al igual que para límites clásicos, se puede analizar el comportamiento del límite al infinito mediante sucesiones.

Proposición 3.5.1 *Sean* $D \subset \mathbb{R}$ *un conjunto que tiene a* $+\infty$ *como punto de contacto,* $L \in \mathbb{R}$ *y* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función dada. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$.

b) Para cada sucesión $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ *monótona creciente y no acotada superiormente se tiene que* $(f(d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* L.

Demostración: Ejercicio. $\square$

Similarmente a la definición 3.5.2 se tiene la de cuando la variable *decrece* inconmesurablemente.

Definición 3.5.3 *Sea $D \subset \mathbb{R}$ un conjunto que tiene a $-\infty$ como punto de contacto, sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $L \in \mathbb{R}$. Se escribe $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ si: para toda $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$x \in D, x < -N \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon \, .$$

Un enunciado similar a la proposición 3.5.1 es válido, vea y resuelva el ejercicio 3.5.2.

Otro resultado importante para límites al infinito es que también son válidas las propiedades aritméticas; éstas pueden demostrarse directamente de la definición (cosa que se sugiere al lector haga ahora) o bien puede pasarse a límites clásicos, que es lo que se hará a continuación.
Debe recordarse primero que $D \subset \mathbb{R}_+$ tiene a $+\infty$ como punto de contacto si y solo si $r[D] = \{1/d : d \in D\}$ tiene a 0 como punto de contacto (vea el ejercicio 3.2.7 y use $r[r[D]] = D$).

Definición 3.5.4 *Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ con $D \subset \mathbb{R}_+$ teniendo a $+\infty$ como punto de contacto. Sea $f^* : r[D] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida mediante $f^*(x) = f(1/x)$.*

Es importante observar que 0 es punto de contacto del dominio de f^*.

Teorema 3.5.1 *Con la notación y supuestos de la definición anterior se tiene que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ si y solo si $\lim\limits_{x \to 0} f^*(x) = L$.*

Demostración: Son dos las direcciones a demostrar.

$\boxed{\Rightarrow}$ Se quiere demostrar el límite clásico $\lim\limits_{x\to 0} f^*(x) = L$. Sea $\varepsilon > 0$, como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ se puede encontrar $N \in \mathbb{N}$ de tal forma que si $y \in D$, $y > N$, entonces $|f(y) - L| < \varepsilon$. Sea $\delta := 1/N$, esta funcionará; en efecto, sea $x \in r[D]$, $0 < |x - 0| < \delta = 1/N$, dado que $x > 0$ se tiene que $x < 1/N$ de donde $N < 1/x$ asi que, como $1/x \in r[D]$, se concluye (de la elección de N) que

$$|f^*(x) - L| = |f(1/x) - L| < \varepsilon.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Se hará uso la proposición 3.5.1 para demostrar $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$. Sea $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ una sucesión creciente y no acotada superiormente. Se quiere demostrar que $(f(d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L. Debe observarse primero que $(1/d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset r[D]$ converge a 0 (vea el ejercicio 3.5.3). Como $\lim\limits_{x\to 0} f^*(x) = L$ se tiene del teorema de equivalencia de límites por sucesiones (teo. 3.3.1) que $f^*(1/d_n) \longrightarrow L$, es decir $f(d_n) \longrightarrow L$.

$\square$

En la demostración anterior se han usado las dos técnicas, en la primera parte la de $\varepsilon - \delta$ y en la segunda la de sucesiones. La primera parte puede hacerse usando sucesiones y la segunda usando $\varepsilon - N$. Se recomienda que el lector haga, a manera de ejercicio, las demostraciones con estas variantes.

Un enunciado análogo al del teorema 3.5.1 se tiene para el caso $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ cuando $D \subset \mathbb{R}_- := \{r \in \mathbb{R} : r < 0\}$ tiene a $-\infty$ como punto de contacto.

Ahora es turno de enunciar las propiedades aritméticas de límites al infinito (PA-LF-infinito).

Teorema 3.5.2 ***(Propiedades aritméticas de límites al infinito)*** *Sea $D \subset \mathbb{R}_+$ un conjunto que tiene a $+\infty$ como punto de contacto. Sean $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que existen los límites $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x)$. Se tiene entonces que existen también los siguientes límites y se dan las igualdades correspondientes.*

a) $\lim_{x\to+\infty}(f+g)(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) + \lim_{x\to+\infty} g(x)$.

b) $\lim_{x\to+\infty}(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda \lim_{x\to+\infty} f(x) + \mu \lim_{x\to+\infty} g(x)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

c) $\lim_{x\to+\infty}(fg)(x) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x)\right)\left(\lim_{x\to+\infty} g(x)\right)$.

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to+\infty} g(x)}{\lim_{x\to+\infty} g(x)}$*, siempre que* $\lim_{x\to+\infty} g(x) \neq 0$.

e) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty} f(x)}$*, siempre que* $f \geq 0$.

Un enunciado análogo se tiene si $D \subset \mathbb{R}_-$, $-\infty$ es punto de contacto de D, cuando se substituye $x \to +\infty$ por $x \to -\infty$ en lo anterior.

Demostración: Usando las funciones $f^*, g^* : r[D] \longrightarrow \mathbb{R}$ y el teorema 3.5.1 puede verse que todas las propiedades anteriores se regresan al caso clásico de PA-LF. Se demostrarán $a)$ y $e)$ de esta manera (a modo de ejemplo), dejando el resto como ejercicio para el lector.
Para $a)$ se tiene

$$\lim_{x\to+\infty}(f+g)(x) \underset{\text{teo. 3.5.1}}{=\!=\!=} \lim_{x\to0}(f+g)^*(x) = \lim_{x\to0}(f^*+g^*)(x)$$
$$\underset{\text{PA-LF}}{=\!=} \lim_{x\to0} f^*(x) + \lim_{x\to0} g^*(x) \underset{\text{teo. 3.5.1}}{=\!=\!=} \lim_{x\to+\infty} f(x) + \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

Para $e)$ sea $L := \lim_{x\to+\infty} f(x)$, se quiere demostrar que $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$. Sea $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ una sucesión monótona creciente y no acotada superiormente, por la proposición 3.5.1 se debe demostrar que $\sqrt{f(d_n)} \longrightarrow \sqrt{L}$. Lo último es cierto pues $f(d_n) \longrightarrow L$ y con esto y las PA-SC se concluye que $\sqrt{f(d_n)} \longrightarrow \sqrt{L}$. $\square$

Al trabajar con límites al infinito se puede apreciar lo importante que son límites clásicos del tipo $\lim\limits_{x\to 0} f^*(x)$, donde $D \subset \mathbb{R}_+$ es el dominio de la función original f, en los que x solo se acerca a cero *por la derecha* pues $x > 0$ para toda $x \in r[D]$. En muchos textos se da énfasis a los límites laterales y su relación con los límites clásicos, en nuestro caso esto viene abarcado por nuestra definición de límite (que usa puntos de contacto); de todos modos se dará a continuación la definición de estos y se dejará al lector una serie de ejercicios para que se familiarice con dicho concepto.

Definición 3.5.5 (Límites laterales) *Sea $a \in \mathbb{R}$ punto de contacto de D y sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Suponga que a es punto de contacto de $D_{a+} := D\cap(a, +\infty)$. Si para la función $f|_{D_{a+}} : D_{a+} \longrightarrow \mathbb{R}$ existe el límite $\lim\limits_{x\to a} f|_{D_{a+}}(x)$ entonces se dice que dicho límite es* el límite por la derecha de f cuando $x \to a$ *y se le denota por* $\lim\limits_{x\searrow a} f(x)$ *o por* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
Del mismo modo, en caso de que a sea punto de contacto de $D_{a-} := D\cap(-\infty, a)$ (y exista) se define el límite por la izquierda de f cuando $x \to a$ *mediante*

$$\lim_{x\nearrow a} f(x) := \lim_{x\to a^-} f(x) := \lim_{x\to a} f|_{D_{a-}}(x)$$

El último teorema de esta sección es el siguiente resultado importante sobre límites laterales.

Teorema 3.5.3 (Pegado de límites) *Sean $a, L \in \mathbb{R}$ y sea $D \subset \mathbb{R}$ tal que a es punto de contacto tanto para D_{a+} como para D_{a-} (notación de la definición anterior). Sean $f : D_{a-} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : D_{a+} \longrightarrow \mathbb{R}$*

funciones tales que $\lim_{x \nearrow a} f(x) = L = \lim_{x \searrow a} g(x)$*. Si* $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *es la función dada por*

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{si } x < a \\ g(x) & \textit{si } x \geq a \end{cases}$$

entonces existe $\lim_{x \to a} F(x)$ *y coincide con* L*.*

Demostración: La prueba es similar a la del teorema 3.4.3.
Sea $(d_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D - \{a\}$ una sucesión arbitraria. Se quiere demostrar que $F(d_n) \longrightarrow L$. Se definen los dos siguientes conjuntos

$$\mathcal{N}_a := \{n \in \mathbb{N} : d_n < a\} \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_a := \{n \in \mathbb{N} : d_n > a\}.$$

Existen dos casos a considerar.
Caso 1: Alguno de $\mathcal{N}_a$ o $\mathcal{P}_a$ es finito. Puede suponerse que $\mathcal{N}_a$ es finito (el caso en que $\mathcal{P}_a$ es finito es completamente análogo). Se tiene entonces que existe $N \in \mathbb{N}$ de tal forma que $d_n \in \mathcal{P}_a$ para toda $n \geq N$. Debe recordarse que para la convergencia de $(F(d_n))_{n \in \mathbb{N}}$ puede ignorarse lo que pasa al principio de la sucesión (ejercicio 2.1.6). Ahora bien, para $n \geq N$ se tiene que $d_n \in \mathcal{P}_a$, con lo que $F(d_n) = g(d_n)$, de donde

$$\lim_{n \to \infty} F(d_n) = \lim_{n \to \infty} g(d_n) = \lim_{x \searrow a} g(x) = L,$$

en donde en la última igualdad se ha utilizado el teorema 3.3.1.
Caso 2: Ambos conjuntos $\mathcal{N}_a$ y $\mathcal{P}_a$ son infinitos. En este caso es posible escribir $\mathcal{N}_a = \{n_1 < n_2 < \cdots\}$ y $\mathcal{P}_a = \{m_1 < m_2 < \cdots\}$. Claramente se tienen

$$\lim_{k \to \infty} F(d_{n_k}) = \lim_{k \to \infty} f(d_{n_k}) = \lim_{x \nearrow a} f(x) = L,$$

$$\lim_{k \to \infty} F(d_{m_k}) = \lim_{k \to \infty} g(d_{m_k}) = \lim_{x \searrow a} g(x) = L.$$

Ahora bien, dado $\varepsilon > 0$ se puede escoger $N_1 \in \mathbb{N}$ de tal forma que

$$|F(d_{n_k}) - L| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |F(d_{m_k}) - L| < \varepsilon$$

siempre que $k \geq N_1$. Sea $N = \text{máx}\{n_{N_1}, m_{N_1}\}$. Para $n \geq N$ se tiene $n \geq n_{N_1} \geq N_1$ y $n \geq m_{N_1} \geq N_1$ por lo que, independientemente de si $n \in \mathcal{P}_a$ o $n \in \mathcal{N}_a$, se tiene $|F(d_n) - L| < \varepsilon$. $\square$

El *regreso* del teorema anterior también es válido, resuelva el ejercicio 3.5.7 para convecerse de esto.

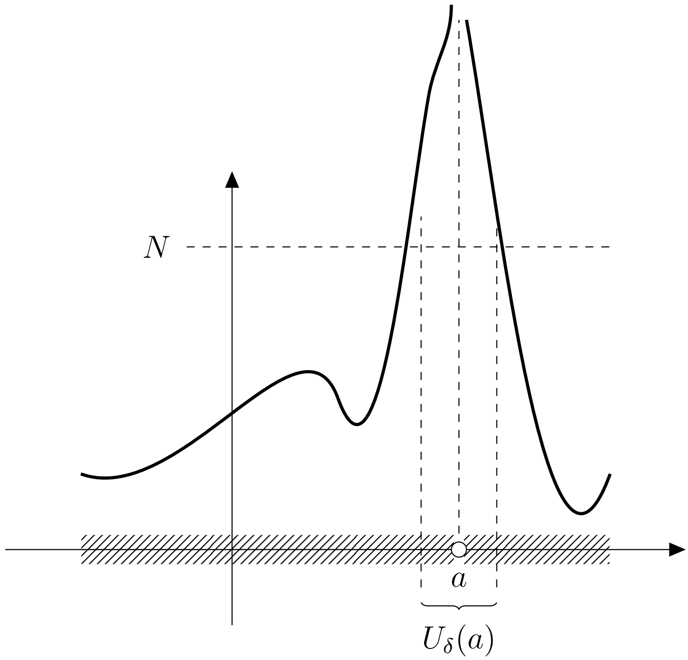
3.5.2. Límites infinitos.

El último de los casos de límites a considerar es el de cuando el valor de la función es el que crece cuando la variable se acerca a un punto de contacto del dominio. Este es el que se estudia a continuación.

Definición 3.5.6 *Sea $a \in \mathbb{R}$ un punto de contacto de $D \subset \mathbb{R}$ y sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que $f(x)$* tiende a $+\infty$ cuando x tiende a a *(lo que se escribe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$) si para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $\delta > 0$ de tal forma que se da la siguiente implicación*

$$x \in U_\delta \cap [D - \{a\}] \quad \Longrightarrow \quad f(x) > N.$$

Gráficamente la situación es como sigue.



Ejemplo 3.5.2 *Sea* $n \in \mathbb{N}$ *y sea* $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = 1/x$*. Se tiene*

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty\,;$$

en efecto, sea $N \in \mathbb{N}$*, tomando* $\delta := 1/N$ *se tiene, para* $x \in U_\delta \cap [D - \{0\}]$*, que* $0 < x < 1/N$ *de donde* $f(x) = 1/x > N$*.*

De manera similar se define

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty\,;$$

se deja como ejercicio al lector dar dicha definición.

Ejemplo 3.5.3 *Sea* $n \in \mathbb{N}$ *y sea* $f : (-1,0) \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = 1/x$*. Se tiene*

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty\,.$$

A continuación se va a conjuntar a los dos últimos ejemplos en uno solo y aprovechar a comentar algo que suele confundir a los principiantes.

Ejemplo 3.5.4 *Sea* $f : D := (-1, 0) \cup (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ *la función dada por* $f(x) = 1/x$. *Se tiene de los ejemplos previos que* $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) := \lim\limits_{x \to 0} f|_{(-1,0)}(x) = -\infty$ *y que* $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) := \lim\limits_{x \to 0} f|_{(0,1)}(x) = +\infty$. *Sin embargo* $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ *no existe en ninguno de los sentidos estudiados previamente: no es un límite real pues* $f(x)$ *no es localmente acotada cerca de* 0 *(proposición 3.2.4), tampoco es* $+\infty$ *pues para todo* $\delta > 0$ *se pueden encontrar* $x \in U_\delta \cap [D - \{a\}]$ *tales que* $f(x) < 0 < N$ *(basta* $x = -\delta/2$*). Similarmente tampoco* $-\infty$ *puede ser opción al límite.*

Hay también una relación entre estos límites y las sucesiones. Antes de enunciar el teorema correspondiente se da el siguiente lema, el cual resuelve un paso técnico de la demostración del teorema de interés.

Lema 3.5.1 *Sea* $a \in \mathbb{R}$ *un punto de contacto de* $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función tal que* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ *y sea* $(d_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D - \{a\}$ *una sucesión que converge a* a. *Se tiene entonces que para cualquier pareja* $(n, \delta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$ *existe* $m > n$ *de tal forma que* $|d_m - a| < \delta$ *y* $f(d_m) > \max\{n, f(d_n)\}$.

Demostración: Sea $(n, \delta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$. Sea N un natural satisfaciendo $N > \max\{n, f(d_n)\}$ (puede hacerse tal elección pues $\max\{n, f(d_n)\}$ no es cota superior de $\mathbb{N}$ según la propiedad arquimediana); como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ se tiene que para esta N existe $\delta_1 > 0$ de tal forma que si $x \in U_{\delta_1}(a) \cap [D - \{a\}]$ entonces $f(x) > N$. Se considera ahora el positivo $\varepsilon := \min\{\delta, \delta_1\}$, como $d_n \longrightarrow a$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$

de tal forma que $|d_n - a| < \varepsilon$ siempre que $n \geq N_2$.
Un $m \in \mathbb{N}$ como el que se busca es $m := \text{máx}\{n, N_2\} + 1$; en efecto, como $m > N_2$ se tiene que $|d_m - a| < \varepsilon \leq \delta_1$ de donde $f(d_m) > N > f(d_n)$. Claramente $m > n$ y $|d_n - a| < \varepsilon \leq \delta$. $\square$

Teorema 3.5.4 (Equivalencia de límites infinitos con sucesiones) *Sea $a \in \mathbb{R}$ punto de contacto de $D \subset \mathbb{R}$ y sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

b) Para toda sucesión $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D - \{a\}$ existe una subsucesión $(d_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de tal forma que $(f(d_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente y no acotada superiormente.

Demostración:
$\boxed{a) \Rightarrow b)}$ Sea $n_1 = 1$ y apliquese el lema 3.5.1 a la pareja $(1, 1/2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$, con esto se encuentra $n_2 > 1 = n_1$ de tal forma que $f(d_{n_2}) > \text{máx}\{1, f(d_{n_1})\}$ y $|d_{n_2} - a| < 1/2$. Suponga que se han construido $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ tales que $f(d_{n_1}) < f(d_{n_2}) < \cdots < f(d_{n_k})$ y $|d_{n_j} - a| < 1/j$, $f(d_{n_j}) \geq j$ para $2 \leq j \leq k$. Se construirá ahora n_{k+1}. Aplicando nuevamente el lema 3.5.1, pero ahora a la pareja $(n_k, \frac{1}{k+1})$, se tiene que existe $n_{k+1} > n_k$ de tal forma que $f(d_{n_{k+1}}) > \text{máx}\{n_k, f(d_{n_k})\}$ y $|d_{n_{k+1}} - a| < 1/(k+1)$.
Se han construido $n_1 < n_2 < \cdots$ de tal forma que $|d_{n_j} - a| < 1/j$ para toda $j \geq 2$, de donde $d_{n_j} \longrightarrow a$; de la construcción se tiene $f(d_{n_1}) < f(d_{n_2}) < \cdots$ y como $f(d_{n_j}) \geq n_j \geq j$ para todo natural $j \geq 2$, la sucesión monótona creciente $(f(d_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ no puede ser acotada superiormente.

$\boxed{b) \Rightarrow a)}$ Se demostrará la contrarrecíproca. Supongase entonces que $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq +\infty$. Existe entonces un natural $N_0 \in \mathbb{N}$ de tal forma que para toda $\delta > 0$ existe $x \in U_\delta(a) \cap [D - \{a\}]$ con $f(x) \leq N_0$; en particular se puede tomar $d_n \in U_{1/n}(a) \cap [D - \{a\}]$ de tal forma que $f(d_n) \leq N_0$. Dado que $|d_n - a| < 1/n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a, sin embargo dado que N_0 es una cota superior para la sucesión $(f(d_n))_{n\in\mathbb{N}}$, ésta no puede tener subsucesiones que no sean acotadas superiormente. $\square$

Un resultado análogo al anterior se tiene para el límite
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

El siguiente resultado corresponde a las propiedades aritméticas de los límites infinitos (se abreviará PAL-$\pm\infty$), debe observarse que son muchas menos que en enunciados previos análogos de propiedades aritméticas, la razón es que no se pueden extender las operaciones de $\mathbb{R}$ para abarcar a los símbolos $\pm\infty$ (resuelva el ejercicio 3.5.11 para complementar los resultados siguientes).

Teorema 3.5.5 ***(Propiedades aritméticas de límites infinitos)*** *Sea $a \in \mathbb{R}$ un punto de contacto de $D \subset \mathbb{R}$ y sean $f, g, h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} h(x) = -\infty$. Se tiene entonces que:*

a) $\lim\limits_{x\to a}(f + g)(x) = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x) = +\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to a}(fh)(x) = -\infty$.

Demostración: Sea $N \in \mathbb{N}$. En cada caso se busca un $\delta > 0$.
$a)$ y $b)$. Existe $\delta > 0$ tal que $x \in U_\delta(a) \cap [D - \{a\}]$ implica $f(x) > N$

y $g(x) > 1$; esta δ claramente funciona: para $x \in U_\delta(a) \cap [D - \{a\}]$ se tienen

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) > N + 1 > N$$
$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) > (N)(1) = N.$$

$c)$ Sea $\delta > 0$ de tal forma que $x \in U_\delta(a) \cap [D - \{a\}]$ implique $f(x) > 1$ y $h(x) < -N$. Se tiene

$$(fh)(x) = f(x) \cdot h(x) \underset{(f(x)>0)}{<} f(x)(-N) < -N.$$

$\square$

El siguiente resultado indica cómo interactúan límites infinitos con límites clásicos, debe observarse que se ha excluido el caso $L = 0$ (el cual está incluido en el ejercicio 3.5.11).

Proposición 3.5.2 *Sea $a \in \mathbb{R}$ un punto de contacto de $D \subset \mathbb{R}$ y sean $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $= \lim_{x\to a} g(x) = L \in \mathbb{R}$. Se tiene entonces que:*

a) $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = +\infty$.

b) *Si $L > 0$ entonces $\lim_{x\to a}(fg)(x) = +\infty$ y si $L < 0$ entonces $\lim_{x\to a}(fg)(x) = -\infty$. Resultados análogos se siguen si se cambia $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ por $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.*

Demostración: El caso $a)$ se deja como ejercicio al lector.

$b)$ Se analiza primero el caso $L > 0$. Sea $\delta_1 > 0$ de tal forma que $g(x) > L/2$ si $x \in U_{\delta_1}(a) \cap [D - \{a\}]$ (teorema 3.2.2 de la preservación del signo). Dado $N \in \mathbb{N}$ se puede encontrar otro natural N_1 satisfaciendo $N_1 > 2N/L$ (propiedad arquimediana), para este $N_1 \in \mathbb{N}$ es posible elegir $\delta > 0$, $\delta \leq \delta_1$, de tal forma que $f(x) > N_1$ si $x \in U_\delta(a) \cap [D - \{a\}]$.

Esta δ funciona: para $x \in U_\delta(a) \cap [D - \{a\}] \subset U_{\delta_1}(a) \cap [D - \{a\}]$ se tiene que

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \underset{\text{prop. 1.4.3}}{>} N_1 \left(\frac{L}{2}\right) > \left(\frac{2N}{L}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = N\,.$$

El caso $L < 0$ se reduce al caso $L > 0$ del siguiente modo; por las PA-LF $\lim\limits_{x \to a}(-g)(x) = -L > 0$ así que $\lim\limits_{x \to a} f(x)(-g(x)) = +\infty$, con esto y el ejercicio 3.5.9 se concluye que $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = -\infty$ $\square$

3.5.3. Ejercicios.

Ejercicio 3.5.1 *Demuestre la proposición 3.5.1.*

Ejercicio 3.5.2 *Suponga que $-\infty$ es punto de contacto de $D \subset \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función dada. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$.

b) Para cada sucesión $(d_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ monótona decreciente y no acotada inferiormente se tiene que $(f(d_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a L.

Ejercicio 3.5.3 *Complete la demostración del teorema 3.5.1 mostrando que si $(d_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ es una sucesión monótona creciente y no acotada superiormente entonces $(1/d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0.*

Ejercicio 3.5.4 *Realice las demostraciones de los incisos faltantes de las PA-LF-al-infinito (teorema 3.5.2).*

Ejercicio 3.5.5 *Sean $L \in \mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$.*

- *Si a es punto de contacto de $D_{a+} = D \cap (a, +\infty)$, demuestre que $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = L$ si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de tal modo que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x \in D$, $0 < x - a < \delta$.*

- *Si a es punto de contacto de $D_{a-} = D \cap (-\infty, a)$, demuestre que $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = L$ si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de tal modo que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x \in D$, $0 < a - x < \delta$.*

- *Suponga que a es punto de contacto de ambos D_{a-} y D_{a+}. Muestre que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ si y solo si $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = L = \lim\limits_{x \nearrow a} f(x)$.*

Ejercicio 3.5.6 *Enuncie y demuestre una versión de propiedades aritméticas para límites laterales.*

Ejercicio 3.5.7 *Sean f, g y F definidas como en el teorema 3.5.3 con la diferencia de que ahora $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) \neq \lim\limits_{x \searrow a} g(x)$. Demuestre que no existe $\lim\limits_{x \to a} F(x)$.*

Ejercicio 3.5.8 *Considere la función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$F(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \textit{si } x < 1, \\ 2 & \textit{si } x = 1, \\ 7 - 2x & \textit{si } x > 1. \end{cases}$$

Muestre que existe $\lim\limits_{x \to 1} F(x)$ pero es diferente a $F(1)$.

Ejercicio 3.5.9 *Demuestre la equivalencia de las siguientes afirmaciones.*

- $\lim\limits_{x \to a} (-f)(x) = -\infty$.

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

- *Para todo real* $M > 0$ *existe* $\delta > 0$ *de tal forma que si* $x \in U_\delta(a) \cap [D - \{a\}]$ *entonces* $f(x) > M$.

Ejercicio 3.5.10 *Demuestre la parte* $a)$ *de la proposición 3.5.2.*

Ejercicio 3.5.11 *En cada uno de los siguientes casos dé ejemplos de funciones* $f, g, h : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ *tales que* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 0$ *y tal forma que se cumpla respectivamente lo que se indica.*

- $\lim\limits_{x\to a}(fh)(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to a}(fh)(x) = 0$.
- $\lim\limits_{x\to a}(fh)(x) = 2$.
- $\lim\limits_{x\to a}(fh)(x) = -3$.
- $\lim\limits_{x\to a}(fh)(x) = c$, *para* $c \neq 0$ *alguna constante previamente elegida.*
- $\lim\limits_{x\to a}(f/h)(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to a}(f/h)(x) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = 0$.
- $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = c$, *para cualquier* $c \in \mathbb{R}$ *previamente elegida.*

Ejercicio 3.5.12 *Se deja al lector definir lo que debería de significar* $\lim\limits_{x\to \varepsilon_1\infty} f(x) = \varepsilon_2\infty$, *donde* $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{+,-\}$.

4

Teoría de funciones continuas

4.1. El concepto de continuidad

¿Cuándo tiene sentido la igualdad $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$? Debe de observarse que para que esto tenga sentido deben satisfacerse ciertas condiciones para $a \in \mathbb{R}$ y para $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$:

- Debe tenerse $a \in D$ para que tenga sentido $f(a)$.
- Se requiere la existencia de $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, lo cual requiere que a sea punto de contacto de D.
- Deben coincidir $f(a)$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Funciones para las que se cumple todo lo anterior son las protagonistas de este capítulo.

4.1.1. Definición y ejemplos básicos.

Definición 4.1.1 *Sean $a \in D$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f es* continua en a *si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Si f es continua en* todo $a \in D$ *se dice que f es continua.*

En el siguiente ejemplo se repasan algunas funciones continuas que ya han aparecido en este en el texto.

Ejemplo 4.1.1 *Las siguientes funciones son continuas.*

- *Las transformaciones afines* $T_{p,q} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $x \mapsto px + q$ *(vea la proposición 3.2.3). En particular la función identidad* $\mathbb{1}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $x \mapsto x$ *es continua por ser afin (es el caso* $p = 1$ *y* $q = 0$*).*

- *Las funciones constantes* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *son continuas (vea el ejemplo 3.2.4).*

- *La función valor absoluto* $abs : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ *es continua (ejemplo 3.2.4).*

- *La función de Dirichlet* $D : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *no es continua en* $a \in \mathbb{R}$*, para todo* $a \in \mathbb{R}$ *(ejemplo 3.2.5).*

- *La función de Thomae* $T : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua en cada irracional* $a \in [0,1]$*, pero no es continua en* $a \in \mathbb{Q}$ *(ese es el ejemplo 3.3.1).*

- *Las funciones escalonadas* $E : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *son continuas en cada* $t \in [a,b] - \{t_j : 0 \leq j \leq n\}$ *(vea la notación del ejercicio 3.3.10). En particular la función de Gauss* $x \mapsto [\![x]\!]$ *es continua en cada* $a \notin \mathbb{Z}$*.*

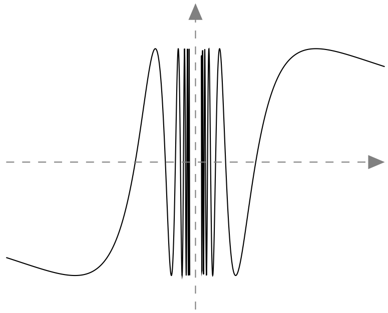
- *La función seno es continua en* $a = 0$ *al igual que la función coseno (teoremas 3.4.2 y 3.4.1 respectivamente).*

- *La función exponencial* $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $x \mapsto a^x$ *es continua si* $a > 0$ *(vea el ejercicio 2.7.2).*

En algunos textos se encuentra la interpretación geométrica de continuidad en a como que *es posible dibujar la gráfica de f cerca de a sin levantar el lápiz*, o también *la gráfica de f no se rompe en* a. Pese a que muchas de las funciones continuas cumplen esto, la idea no es del todo correcta como lo demuestra la función de Thomae (ejemplo 3.3.1).
A continuación se tiene un ejemplo clásico.

Ejemplo 4.1.2 *Sea $c \in \mathbb{R}$ y sea $f_c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$f_c(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(1/x) & \textit{si } x \neq 0 \\ c & \textit{si } x = 0. \end{cases}$$



No importa qué valor tome c, la función f_c no es continua en $a = 0$. El problema es que no existe $\lim_{x\to 0} f_c(x)$.
Para ver esto basta considerar las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dadas por $a_n = 1/[2n\pi + \frac{1}{2}\pi]$ y $b_n = 1/[2n\pi + \frac{3}{2}\pi]$; claramente $a_n \longrightarrow 0$, $b_n \longrightarrow 0$ y también $f_c(a_n) \longrightarrow 1$, $f_c(b_n) \longrightarrow -1$ (ambas sucesiones son de hecho constantes).
Para la función $x \mapsto x^n f_c(x)$ ($n \in \mathbb{N}$ fijo) el límite $\lim_{x\to 0} x^n f_c(x)$ existe pero la continuidad se da solo cuando $c = 0$ (vea el ejercicio 4.1.1).

Se tiene el siguiente resultado análogo al teorema de equivalencia de límite de funciones por sucesiones (teorema 3.3.1), sin embargo se sugiere que antes de que el lector revise la demostración de este teorema, se convenza primero, de que hay algo importante que demostrar.

Teorema 4.1.1 *Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in D$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

a) La función f es continua en a.

b) Para toda sucesión $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a a se tiene que $(f(d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(a)$.

Demostración: La diferencia con el teorema 3.3.1 es que ese resultado excluye la posibilidad de tomar $x = a$ en sus dos incisos, ahora se debe *lidiar* con tener que cosiderar el punto a.
$\boxed{a) \Rightarrow b)}$ Sea $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ convergente a $a \in D$. Se define el conjunto $\mathcal{A} := \{n \in \mathbb{N} : d_n = a\}$. Hay dos casos a considerar sobre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B} := \mathbb{N} - \mathcal{A}$: ambos son infinitos o bien alguno de ellos es finito.
Caso 1: $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son infinitos. En este caso, se tiene dividido $\mathbb{N}$ en dos conjuntos disjuntos $\mathcal{A} = \{n_1 < n_2 < \cdots\}$ y $\mathcal{B} = \{m_1 < m_2 < \cdots\}$. Ahora bien, la sucesión $(f(d_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $f(a)$ por ser sucesión constante; la sucesión $(f(d_{m_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $f(a)$ pues $(d_{m_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset D - \{a\}$ y $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ (aplicación directa del teorema 3.3.1). Se concluye al aplicar el resultado del ejercicio 3.4.1.
Caso 2: Si $\mathcal{A}$ es finito se trunca la sucesión $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a una $(d_n)_{n\geq N}$ en la que se aplique directamente el teorema 3.3.1. Si $\mathcal{B}$ es finito se trunca a una sucesión constante $(d_n)_{n\geq N} = (a)_{n\geq N}$. En ambos casos la sucesión $(f(d_n))_{n\geq N}$ converge a $f(a)$, y con esto $(f(d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(a)$.
$\boxed{b) \Rightarrow a)}$ Esta parte es trivial pues en particular se tiene que la sucesión $(f(d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(a)$ para cualquier sucesión $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D - \{a\}$, basta aplicar entonces el teorema 3.3.1 para concluir $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. $\square$

El teorema anterior enfatiza el que ahora $a \in D$ y que a deba ser incluido en la consideración al límite, por eso una definición de continuidad en $a \in D$ de una función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ del tipo $\varepsilon - \delta$ es como sigue:

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 \ : \ x \in U_\delta(a) \cap D \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Ejemplo 4.1.3 *Sea $a > 0$. Del teorema 4.1.1 y el ejercicio 2.7.2 se tiene que la función $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto a^x$ es continua.*

Un resultado, que para este punto ya no requiere demostración (es consecuencia de las PA-LF y el ejercicio 3.3.3), es el siguiente, al cual se hará referencia como PA-FC.

Teorema 4.1.2 (Propiedades aritméticas de funciones continuas) *Sean $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en $a \in D$. Se tiene que las funciones $f + g$ y fg son continuas en a. Si $g(a) \neq 0$ entonces también $1/g$ y f/g son continuas en a. Si $f \geq 0$ entonces también $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ es continua es a.*

Las PA-FC permiten construir muchas funciones continuas partiendo de algunas elementales, vea el ejercicio 4.1.5 por ejemplo.

Otro resultado muy útil en la práctica (un medio de construcción de funciones continuas) es el que se da a continuación; éste va en el mismo espíritu que el teorema 3.5.3, razón por la cual se dejan los detalles de la prueba al lector, dicha prueba es casi igual solo que incluyendo a a, la demostración no debe serle complicada gracias al teorema 4.1.1.

Teorema 4.1.3 (Lema del pegado) *Sea $a \in D$ y sean $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = L = \lim\limits_{x \searrow a} g(x)$. Se tiene entonces que la función $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{si } x < a \\ L & \textit{si } x = a \\ g(x) & \textit{si } x > a \end{cases}$$

es continua en a.

La continuidad se preserva bajo composición de funciones como se verá a continuación.

Teorema 4.1.4 ***(Invarianza de continuidad bajo composición)*** *Sean $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que*

a) $f(D) \subset E$,

b) f *es continua en $a \in D$ y*

c) g *es continua en $b := f(a) \in E$.*

Se tiene entonces que la composición $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en a.

Demostración: Para ver la continuidad de $g \circ f$ se utilizará varias veces el teorema 4.1.1. Sea $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ una sucesión convergiendo a a; como f es continua en a se tiene que $(f(d_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ es una sucesión convergiendo a $f(a) = b$; como g es continua en b se tiene que entonces $(g(f(d_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergiendo a $g(b) = (g \circ f)(a)$. En resumen $(g \circ f)(d_n) \longrightarrow (g \circ f)(a)$. $\square$

Pese a que con la prueba anterior (muy corta y directa) ya se tiene demostrado la invarianza de la continuidad bajo composición, se dará una prueba $\varepsilon - \delta$ pues la idea de *ir jalando hacia atrás* desde la ε es muy útil y usada en cursos de topología y análisis y esta es una buena ocasión para empezar a aprenderla. Aquí se presenta la segunda demostración del teorema 4.1.4 (también muy corta).

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$. Como g es continua en $b = f(a)$ existe $\delta_1 > 0$ de tal forma que $\varepsilon > |g(y) - g(b)| = |g(y) - (g \circ f)(a)|$ para ***toda*** $y \in U_{\delta_1}(a) \cap E$. Ahora bien, para esta $\delta_1 > 0$, por la continuidad de f en a, existe $\delta > 0$ de tal forma que $|f(x) - f(a)| < \delta_1$ siempre que $x \in U_\delta(a) \cap D$.
Ahora bien, se tiene la siguiente cadena de implicaciones

$$x \in U_\delta(a) \cap D \Longrightarrow f(x) \in U_{\delta_1}(f(a)) \cap E \Longrightarrow |g(f(x)) - (g \circ f)(a)| < \varepsilon$$

lo cual muestra la continuidad de $g \circ f$ en a. □

4.1.2. Ejercicios

Ejercicio 4.1.1 *Sea* $c \in \mathbb{R}$ *una constante dada y sea* $n \in \mathbb{N}$. *Defina la función* $g_{n,c} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *mediante* $g_{n,c}(x) = x^n \operatorname{sen}(1/x)$ *si* $x \neq 0$ *y* $g_{n,c}(0) = c$.

- *Realice las gráficas de* $g_{1,c}$ *y* $g_{2,c}$.
- *Demuestre que existe* $\lim\limits_{x \to 0} g_{n,c}(x)$.
- *Concluya que las únicas funciones* $g_{n,c}$ *que son continuas en* $a = 0$ *son las de la forma* $g_{n,0}$.

Sugerencia: *Para el segundo punto observe que* $|g_{n,c}(x)| \leq |x|^n$.

Ejercicio 4.1.2 *Demuestre las PA-FC (teorema 4.1.2).*

Ejercicio 4.1.3 *Sea* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua. Muestre que para cualquier* $E \subset D$ *no vacío se tiene que la restricción* $f|_E : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua.*

Ejercicio 4.1.4 (Traslación del dominio) *En algunos textos se encuentra el siguiente enunciado:* f *es continua en* a *si solo si*
$\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$.

- *Haga* preciso *el enunciado, hay que definir de modo exacto cuál es el dominio de* $h \mapsto f(a+h)$ *si* D *es el dominio de* f.
- *Demuestre la afirmación una vez que la haya precisado.*

Ejercicio 4.1.5 *Demuestre lo siguiente.*

- *Toda función polinomial* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua.*
- *Sea* $R : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función racional, esto es una función para la cual existen funciones polinomiales* $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *tales que* $R(x) = f(x)/g(x)$ *(observe que esto implica que* $g(x) \neq 0$ *para todo* $x \in D$*) es continua.*

Sugerencia: *Para una prueba limpia en el primer punto use inducción para probar que* $x \mapsto x^n$ *es continua y después continúe con el caso general con inducción sobre el grado.*

Ejercicio 4.1.6 *Demuestre que la función* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \frac{13\,\mathrm{sen}^4(x) - 52\cos^2(x) + 2020\,\mathrm{sen}(x) + 11}{\mathrm{sen}^2(x) + \mathrm{sen}(x) + 1}$$

es continua en $a = 0$.

Sugerencia: *Utilice el teorema 4.1.4.*

Ejercicio 4.1.7 *Argumente el porqué la función* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

es continua en todo $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4.1.8 *Considere la función* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x & \textit{si } x \in \mathbb{Q}, \\ -x & \textit{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Muestre que esta función es continua en $a = 0$ *pero no es continua en cualquier otro* $a \neq 0$.

Ejercicio 4.1.9 *Sea* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que* $0 < \alpha < 1$ *y sea* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua con la propiedad de que para cada* $x \in [a, b]$ *existe* $y_x \in [a, b]$ *de tal forma que* $|f(y_x)| \leq \alpha |f(x)|$.
Demuestre que existe $L \in [a, b]$ *con* $f(L) = 0$.
Sugerencia: *Fije* $x_1 \in [a, b]$ *y construya una sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a, b]$, *empezando en* x_1, *de tal forma que* $|f(x_{n+1})| \leq (\alpha^n)|f(x_1)|$. *¿Qué pasa ahora con* $f(L)$ *donde* L *es límite de alguna subsucesión de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*?*

Los siguientes tres ejercicios dan ejemplos de funciones continuas sobre intervalos cerrados.

Ejercicio 4.1.10 *Sea* $f : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ *una función suprayectiva y estrictamente monótona creciente (i.e.* $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$*). Sea* $x_0 \in (a, b)$, *para un* $\varepsilon > 0$ *dado se elige* $\varepsilon_1 > 0$ *y* $\delta > 0$ *tales que* $\varepsilon_1 < \varepsilon$ *y*

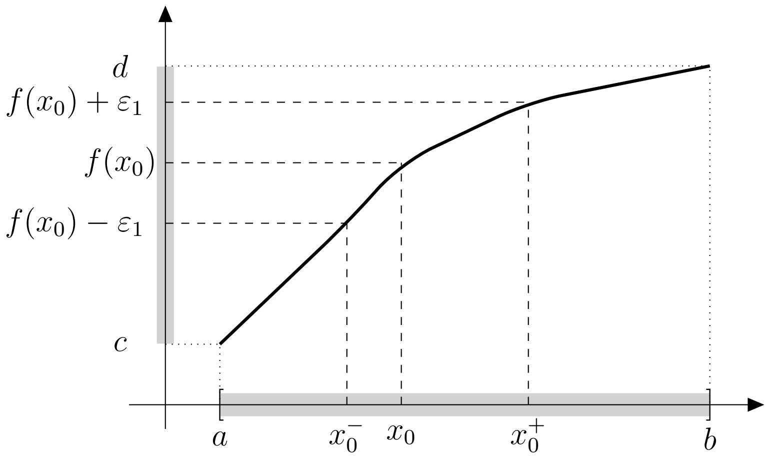
$$f(x_0) + \varepsilon_1, f(x_0) - \varepsilon_1 \in [c, d] \qquad \textit{y} \qquad [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [x_0^-, x_0^+];$$

donde $f(x_0^-) = f(x_0) - \varepsilon_1$ *y* $f(x_0^+) = f(x_0) + \varepsilon_1$.

- *Justifique que efectivamente se pueden hacer tales elecciones/construcciones.*

- *Pruebe que* $x \in [a,b] \cap U_\delta(x_0)$ *implica que* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$ *y concluya que* f *es continua en* x_0.

- *¿Qué adecuaciones tienen que hacerse para demostrar que* f *es continua también en* $x_0 = a$ *y en* $x_0 = b$*?*



Ejercicio 4.1.11 *El ejercicio anterior muestra que si la función* $f : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ *es suprayectiva y estrictamente monótona creciente entonces es continua. Demuestre que el mismo resultado se obtiene si se cambia* creciente *por* decreciente.

Ejercicio 4.1.12 *Sea* $Y \subset \mathbb{R}$ *y sea* $f : [a,b] \longrightarrow Y$ *una función continua tal que existe la función inversa* $f^{-1} : Y \longrightarrow [a,b]$. *Sean también* $x_0 \in [a,b]$ *y* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ *una sucesión convergiendo a* $f(x_0)$. *Demuestre las siguientes afirmaciones, donde* $x_n \in [a,b]$, $f(x_n) = y_n$.

- *Toda subsucesión* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *que es convergente tiene límite* x_0.

- *La sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* x_0.

Concluya de lo anterior que toda función $f : [a,b] \longrightarrow Y$ *continua y biyectiva tiene inversa continua.*
Sugerencia: *En el segundo punto proceda por contradicción encontrando una subsucesión* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ lejos *de* x_0*; ahora encuentre una subsucesión de* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *convergente para contradecir el primer punto.*

4.2. Teoría de funciones continuas en intervalos cerrados.

Se comienza esta sección con un resultado que refina el teorema de la preservación del signo (teorema 3.2.2) para el caso en que el dominio es un intervalo cerrado, este resultado resuelve pasos técnicos en la prueba del teorema de Bolzano que se dará después.

Lema 4.2.1 *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua en* $x_0 \in [a,b]$ *tal que* $f(x_0) > 0$. *Existe* $\delta > 0$ *de tal forma que* $f(x) > f(x_0)/2$ *para toda* x *en la región indicada:*

a) $x \in [a, a+\delta) \subset [a,b]$, *en el caso* $x_0 = a$,

b) $x \in (b-\delta, b] \subset [a,b]$, *en el caso* $x_0 = b$,

c) $x \in U_\delta(a) \subset [a,b]$, *en el caso* $x_0 \in (a,b)$.

Un enunciado análogo se obtiene si $f(x_0) < 0$.

Demostración: Del teorema 3.2.2 existe $\delta_1 > 0$ tal que $f(x) > f(x_0)/2$ para toda $x \in U_{\delta_1}(a) \cap D$.

Ahora se define $\delta > 0$, dependiendo de los casos sobre x_0, para garantizar *no salirse* del intervalo $[a, b]$:

$$\delta := \begin{cases} \text{mín}\{\delta_1, b-a\} & \textbf{si } x_0 \in \{a, b\}, \\ \text{mín}\{\delta_1, x_0 - a, b - x_0\} & \textbf{si } x_0 \notin \{a, b\}. \end{cases}$$

$\square$

4.2.1. El teorema de Bolzano y el T.V.I.

La prueba del teorema de Bolzano dada a continuación está basada en la que se da en el libro de Spivak [6].

Teorema 4.2.1 (Bolzano) *Sea* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua y satisfaciendo* $f(a)f(b) < 0$. *Se tiene entonces que existe* $x_0 \in (a, b)$ *con* $f(x_0) = 0$.

Demostración: Hay 2 casos similares a considerar: $f(a) < 0 < f(b)$ y $f(a) > 0 > f(b)$. Observe que puede pasarse de un caso al otro considerando la función $-f$ en lugar de f y que $(-f)(x_0) = 0$ si y solo si $f(x_0) = 0$, por lo tanto bastará considerar el caso $f(a) < 0 < f(b)$, cosa que se supondrá desde ahora.
Se pretende localizar el *mínimo* x_0 con $f(x_0) = 0$, para esto sea

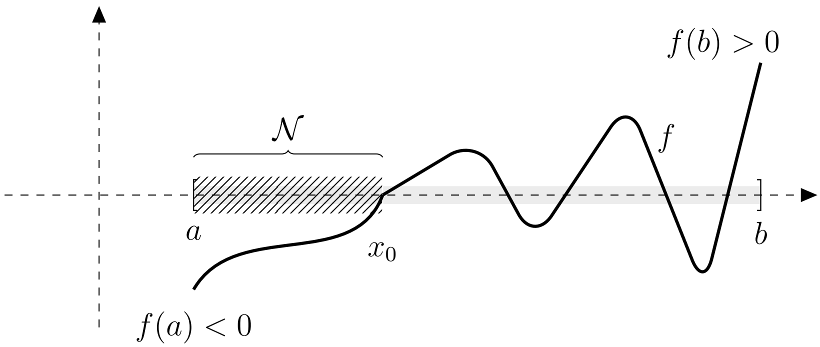
$$\mathcal{N} = \{x \in [a, b] : f(y) < 0 \;\; \forall y \in [a, x]\}$$

el conjunto de las *primeras* preimágenes negativas de f.
$\mathcal{N} \neq \emptyset$ pues $a \in \mathcal{N}$, ($f(a) < 0$, $[a, a] = \{a\}$); puesto que f es continua en a, el lema 4.2.1 nos permite elegir $\delta_a > 0$ de tal forma que $f(x) < 0$ para toda $x \in [a, a + \delta_a) \subset [a, b]$; así $a + \frac{\delta_a}{2} \in \mathcal{N}$.
Como $\mathcal{N} \subset [a, b]$ se tiene que $\mathcal{N}$ es acotado superiormente (b es

cota superior); de hecho, como f es continua en b, por el lema 4.2.1 existe $\delta_b > 0$ de tal modo que $f(x) > 0$ para cualquier $x \in (b - \delta_b, b] \subset [a, b]$, se puede observar entonces $b - \frac{\delta_b}{2}$ es cota superior de $\mathcal{N}$. Por el axioma de completez existe $x_0 = \sup(\mathcal{N})$; ahora bien

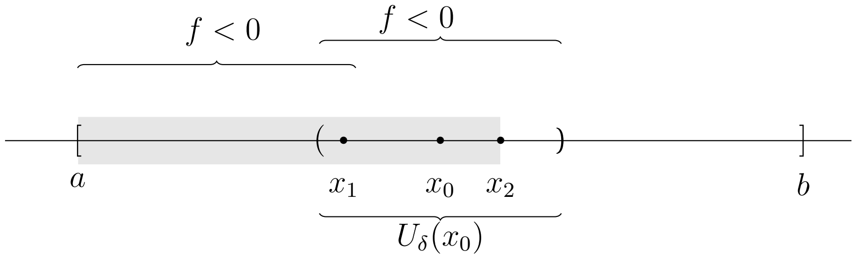
$$a < a + \frac{\delta_a}{2} \leq x_0 \leq b - \frac{\delta_b}{2} < b$$

en donde las dos desigualdades intermedias se siguen porque $a + \frac{\delta_a}{2} \in \mathcal{N}$ y $b - \frac{\delta_b}{2}$ es cota superior de $\mathcal{N}$ respectivamente; se tiene entonces $x_0 \in (a, b)$.

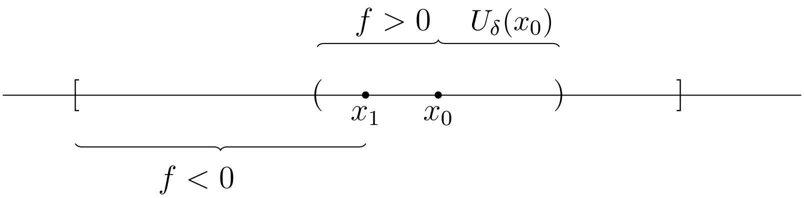


Para demostrar $f(x_0) = 0$ se va a utilizar la tricotomía y demostrar que $f(x_0) > 0$ y $f(x_0) < 0$ son imposibles.
$f(x_0) < 0$ es imposible: Si se tuviera $f(x_0) < 0$ existiría, por el lema 4.2.1, $\delta > 0$ con $U_\delta(x_0) = (x_0, -\delta, x_0 + \delta) \subset [a, b]$ y tal que $f(x) < 0$ para toda $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
Ahora bien; por la proposición 1.5.4, para esta $\delta > 0$ existe $x_1 \in \mathcal{N}$ con $x_0 - \delta < x_1 \leq x_0 = \sup(\mathcal{N})$. Como $x_1 \in \mathcal{N}$, $f(x) < 0$ para toda $x \in [a, x_1]$, pero con esto se tiene entonces que $f(x) < 0$ para toda

$x \in [a, x_1] \cup [x_1, x_0 + \frac{\delta}{2}]$, lo cual dice que $x_2 := x_0 + \frac{\delta}{2} \in \mathcal{N}$.



Por otro lado $x_0 + \frac{\delta}{2} \in \mathcal{N}$ es imposible pues $x_0 + \frac{\delta}{2} > x_0 = \sup(\mathcal{N})$. Descartemos ahora el caso $f(x_0) > 0$. Si se tuviera $f(x_0) > 0$ existiría, nuevamente por el lema 4.2.1, un $\delta > 0$ de tal modo que $U_\delta(x_0) \subset [a, b]$ y tal que $f(x) > 0$ para toda $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Ahora bien; por la proposición 1.5.4, para esta $\delta > 0$ existe $x_1 \in \mathcal{N}$ con $x_0 - \delta < x_1 \leq x_0 = \sup(\mathcal{N})$.



Por un lado $f(x_1) < 0$ pues $x_1 \in \mathcal{N}$ pero por otro $f(x_1) > 0$ pues $x_1 \in U_\delta(x_0)$, esto contradice la propiedad de tricotomía. $\square$

La demostración del teorema de Bolzano es de caracter teórico, no dice cómo encontrar un tal x_0. A continuación se dará otra demostración del teorema de Bolzano usando sucesiones, la prueba produce un algoritmo para encontrar un tal x_0 (que observe que no tiene por qué ser único).

Demostración: (Método de bisección) Nuevamente se considerará solo el caso $f(a) < 0 < f(b)$. La idea es ir cambiando de intervalo a uno que tenga la mitad de la longitud del intervalo anterior *hasta encontrar* el x_0 deseado.

Se comienza por definir $a_1 := a$, $b_1 := b$, $I_1 := [a, b]$ y $m_1 := (a+b)/2$ (el punto medio de $[a, b]$). Si $f(m_1) = 0$ el algoritmo termina al tomar $x_0 = m_1$. En caso contrario, sean a_2, b_2, m_2 definidos de la siguiente manera

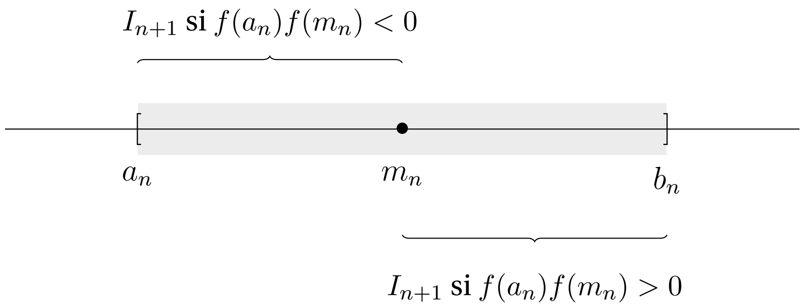
$$(a_2, b_2, m_2) := \begin{cases} (a_1, m_1, (a_1 + m_1)/2) & \text{si } f(a_1)f(m_1) < 0 \\ (m_1, b_1, (m_1 + b_1)/2) & \text{si } f(a_1)f(m_1) > 0. \end{cases}$$

Si $f(a_1)f(m_1) > 0$ entonces $f(m_1)f(b_1) < 0$ pues $f(a_1)$ y $f(b_1)$ son de signo contrario, debe observarse que $a_2 \leq b_2$ en cualquier caso; sea $I_2 := [a_2, b_2]$, la longitud de $I_2 \subset I_1$ es (en cualquier caso) $(b - a)/2$.

Nuevamente, si $f(m_2) = 0$ se define $x_0 = m_2$ y si $f(m_2) \neq 0$ se parte el intervalo a la mitad y decidimos cual será I_3 en base al signo de $f(m_3)$ (m_3 el punto medio de I_2); así se continua de modo inductivo. De modo más preciso, se supone ahora que se han construido, como se indica, intervalos $I_n \subset I_{n-1} \subset \cdots I_1 = [a, b]$, $I_j = [a_j, b_j]$, tales que la longitud de $I_j = (b_j - a_j) = (b - a)/2^{j-1}$ y cada punto medio m_j, $1 \leq j \leq n - 1$ es tal que $f(m_j) \neq 0$ (i.e. aún no se encuentra un punto x_0 con $f(x_0) = 0$) y $f(a_j)f(b_j) < 0$. Sea m_n el punto medio de I_n, si $f(m_n) = 0$ se toma $x_0 := m_n$ y el algoritmo concluye; en caso contrario sean $a_{n+1}, b_{n+1}, m_{n+1}$ definidos de la siguiente manera

$$(a_{n+1}, b_{n+1}, m_{n+1}) := \begin{cases} (a_n, m_n, (a_n + m_n)/2) & \text{si } f(a_n)f(m_n) < 0 \\ (m_n, b_n, (m_n + b_n)/2) & \text{si } f(a_n)f(m_n) > 0. \end{cases}$$

$I_{n+1} := [a_{n+1}, b_{n+1}]$, la siguiente figura de I_n muestra la elección del intervalo I_{n+1}.



Debe observarse que la elección del intervalo garantiza que se tenga en cada momento que $f(a_{n+1})f(b_{n+1}) < 0$.
Ahora bien, si se tiene suerte, en algún paso se encuentra un punto medio x_0 con $f(x_0) = 0$. Supongase que no se tuvo tal suerte; en este caso se habrán construido sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monótona creciente y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monótona decreciente (pues $I_{n+1} \subset I_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$) las cuales son acotadas (ambas constan de elementos de $[a, b]$) y por tanto convergentes (teorema de Weierstrass). Debe tenerse $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ por las PA-SC y el hecho que $b_n - a_n = (b-a)/2^{n-1} \longrightarrow 0$.
La afirmación a demostrar ahora es que $x_0 := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (observese que $x_0 \in [a, b]$) satisface $f(x_0) = 0$. En efecto, usando que f es continua en x_0 se tiene (de la monotonía al límite) que

$$0 \leq f(x_0)^2 = \left(\lim_{n\to\infty} f(a_n)\right)\left(\lim_{n\to\infty} f(b_n)\right) \underset{\text{PA-SC}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) \underset{\text{teo. 2.4.1}}{\leq} 0,$$

de donde $f(x_0) = 0$, obviamente $x_0 \in (a, b)$ pues por la hipósis se tiene $f(a) \neq 0 \neq f(b)$. □

Un ejemplo de cómo puede usarse el teorema de Bolzano para resolver problemas de álgebra, es el dado a continuación.

Ejemplo 4.2.1 *Encuentre un número* $n \in \mathbb{Z}$ *tal que la ecuación*

$$x^5 + 5x^4 + 2x + 1 = 0.$$

posee una solución en el intervalo $[n, n+1]$.
Una manera de atacar este ejercicio *es usando el teorema de Bolzano; obviamente la función a considerar es* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $x \mapsto x^5 + 5x^4 + 2x + 1$. *Para buscar el entero* n *se puede aprovechar que la primera parte del polinomio tiene la forma* $x^5 + 5x^4$, *que puede cancelarse si se toma* $x = -5$, *con esto* $g(-5) = -9 < 0$. *Ahora, bien,*

$$\begin{aligned} g(-4) &= [(-4)^5 + 5(-4)^4] + 2(-4) + 1 \\ &= [(-4)^4] + 2(-4) + 1 = [(16)^2] - 7 > 0. \end{aligned}$$

Para aplicar el teorema de Bolzano basta considerar ahora a la función $f : [-5, -4] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f := g|_{[-5,-4]}$, *que cumple todos los requisitos del teorema y por lo tanto cumple que existe* $x_0 \in (-5, -4)$ *tal que*

$$0 = g(x_0) = x_0^5 + 5x_0^4 + 2x_0 + 1.$$

El n *buscado es entonces* $n = -5$.

Como una aplicación de los teorema de Bolzano puede darse *otra* demostración a la existencia de raíces k-ésimas para números positivos, k entero impar (vea el teorema 2.4.4). Esta demostración se deja como ejercicio al lector, con sugerencia, (vea el ejercicio 4.2.1) y se sugiere que lo resuelva ahora antes de continuar la lectura.
Encontrar una raíz n-ésima de un número $\alpha \in \mathbb{R}$ es encontrar una solución en x a la ecuación polinomial $x^n - \alpha = 0$. Ahora se

mostrará, como una aplicación del teorema de Bolzano, el resultado más general de que toda ecuación polinomial

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

con n impar, tiene una solución $r \in \mathbb{R}$; por las razones anteriores a dicha solución se le llama también raíz del polinomio $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$. Se comenzará por *estimar* que tan grandes pueden ser las raíces de un polinomio, para esto se necesitará el siguiente lema técnico.

Lema 4.2.2 *Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ números cualesquiera. Defina $M = 1 + n \max\{|a_j| : 0 \le j < n\}$. Para $b \in \mathbb{R}$ con $|b| > M$ se tiene entonces que*

$$\left| \frac{a_{n-1}}{b} + \frac{a_{n-2}}{b^2} + \cdots + \frac{a_1}{b^{n-1}} + \frac{a_0}{b^n} \right| < 1\,.$$

Demostración: Observe que $|b| > M \ge 1$ implica que

$$|b^j| = |b|^j > |b| > M \ge n|a_{n-j}|$$

de donde $|a_{n-j}|/|b^j| < 1/n$ para toda $0 < j \le n$. Con esto se tiene

$$\begin{aligned}\left| \frac{a_{n-1}}{b} + \frac{a_{n-2}}{b^2} + \cdots + \frac{a_0}{b^n} \right| &\underset{\text{Des. tria.}}{\le} \left| \frac{a_{n-1}}{b} \right| + \left| \frac{a_{n-2}}{b^2} \right| + \cdots + \left| \frac{a_0}{b^n} \right| \\ &< \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n \text{ veces}} = 1\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 4.2.2 (Estimación del tamaño de las raíces) *Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ números cualesquiera. Si la ecuación polinomial*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

posee una raíz real r *entonces dicha raíz se encuentra en el intervalo* $[-M, M]$*, donde* $M = 1 + n\,\text{máx}\{|a_j| : 0 \leq j < n\}$.

Demostración: Se demostrará que fuera del intervalo $[-M, M]$ no hay soluciones de la ecuación polinomial dada. Sea $b \notin [-M, M]$, así $|b| > M$ y por el lema 4.2.2 se sigue que $-1 < \frac{a_{n-1}}{b} + \frac{a_{n-2}}{b^2} + \cdots + \frac{a_1}{b^{n-1}} + \frac{a_0}{b^n} < 1$ y con esto que $1 + \frac{a_{n-1}}{b} + \frac{a_{n-2}}{b^2} + \cdots + \frac{a_1}{b^{n-1}} + \frac{a_0}{b^n} > 0$. Ahora bien, basta observar que

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0 = (b^n)\left(1 + \frac{a_{n-1}}{b} + \cdots + \frac{a_1}{b^{n-1}} + \frac{a_0}{b^n}\right),$$

el lado derecho no puede ser cero al ser el producto de dos números diferentes de cero (recuerde que $|b| > M \geq 1$). Se concluye de lo anterior que b no es solución de la ecuación dada. □

Ahora sí, ya se puede demostrar el resultado de existencia de raíces reales para ecuaciones polinomiales de grado impar.

Teorema 4.2.3 (Existencia de raíces de polinomios de grado impar) *Sea* $n \geq 3$ *un entero impar y sean* $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ *números cualesquiera. Para la ecuación polinomial*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

existe una solución real r.

Demostración: Sea M como en el teorema 4.2.2 y sea $b > M$. Se definen $a = -b$ y la función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$. Por el ejercicio 4.1.5 se sabe que f es continua. Ahora bien,

$$f(a) = f(-b) = (-b)^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{(-b)} + \cdots + \frac{a_0}{(-b)^n}\right) < 0$$

en donde en la última desigualdad se usó que $(-b)^n = -b^n < 0$ y el otro factor es positivo según el lema 4.2.2. De modo análogo

$$f(b) = (b)^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{b} + \cdots + \frac{a_0}{b^n}\right) > 0.$$

Como $f(a) < 0 < f(b)$ se sigue del teorema de Bolzano que existe $r \in (a,b)$ con $f(r) = 0$, es decir, la ecuación dada tiene una solución real r.

□

El ejemplo típico, de que el resultado anterior no es cierto para cuando n es par, es $x^2+1 = 0$ o más generalmente $x^{2n}+1 = 0$. Ninguna de estas ecuaciones tiene solución (vea el ejercicio 4.2.2).

Una consecuencia sencilla del teorema de Bolzano es el teorema de valor intermedio (abreviado desde ahora como T.V.I.); de hecho ambos resultados son equivalentes pues el teorema de Bolzano es un caso particular del T.V.I..

Teorema 4.2.4 (Teorema de valor intermedio) *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < c < f(b)$ (o análogamente $f(a) > c > f(b)$). Se tiene entonces que existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0) = c$.*

Demostración: Se considera a la función $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - c$, esta función es continua y además satisface $g(a)g(b) < 0$, así por el teorema de Bolzano (teo. 4.2.1) existe $x_0 \in (a,b)$ con $0 = g(x_0) = f(x_0) - c$, es decir $f(x_0) = c$.

□

4.2.2. Ejercicios.

Ejercicio 4.2.1 *Sea $k \geq 2$ número natural y $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$. Defina $b = \text{máx}\{1, \alpha\}$ y considere la función $g : [0,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante*

$g(x) = x^k$. *Demuestre que* $g(0) < \alpha < g(b)$ *y por lo tanto existe* $r \in (0, b)$ *con* $r^k = \alpha$.

Sugerencia: *Trate por separado los casos* $b = 1$ *y* $b = \alpha$.

Ejercicio 4.2.2 *Demuestre que para toda* $n \in \mathbb{N}$ *la ecuación* $x^{2n} + 1 = 0$ *no tiene raíces reales.*

Sugerencia: *Use el teorema 1.4.1;el caso* $n = 1$ *implica el caso general.*

Ejercicio 4.2.3 *En cada uno de los casos siguientes se debe demostrar que para* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *hay* k *elementos de* $[a, b]$ *satisfaciendo* $f(\xi) = 0$.

a) $f(x) = x^4 + 7x^3 + x - 8$, $[a, b] = [-10, 5]$ *y* $k = 2$.

b) $f(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x - 5$, $[a, b] = [-3, 3]$ *y* $k = 2$.

c) $f(x) = 3x^4 - 21x^3 + 36x^2 + 2x - 8$, $[a, b] = [-5, 5]$ *y* $k = 4$.

Ejercicio 4.2.4 *Muestre que existe un número real* x *tal que*

$$\operatorname{sen}(x) = x - 1.$$

Ejercicio 4.2.5 *Sea* $-2 < b < 2$ *un número real dado. Demuestre que la ecuación*

$$x^3 + b = 3x$$

posee una solución en el intervalo $(-1, 1)$.

Ejercicio 4.2.6 *Sea* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua y tal que:*

- $g(t) = 0$ *se satisface únicamente para* $t = a$ *y*
- *existen* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *con* $x_1 < a < x_2$ *y* $g(x_j) > 0$, $j = 1, 2$.

¿Qué puede decirse acerca de $g(t)$ *para toda* $t \neq a$*?*

Ejercicio 4.2.7 *Demuestre las siguientes afirmaciones.*

- *Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y solo toma valores racionales entonces es necesariamente constante.*

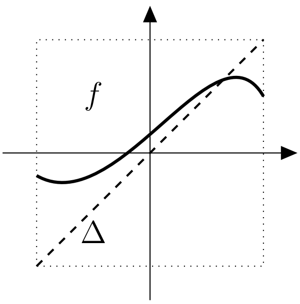
- *Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas las cuales coinciden en los racionales, esto es, tales que: $f(r) = g(r)\ \forall r \in \mathbb{Q}$. Demuestre que necesariamente $f = g$.*

Ejercicio 4.2.8 *Sea $L : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que para cada racional $r \in \mathbb{Q}$ se tiene: $L(rx) = rL(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Muestre que existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que: $L(x) = cx\ \forall x \in \mathbb{R}$.*

Sugerencia: *Empiece viendo quién trendría que ser la constante c; aplique el problema anterior.*

Ejercicio 4.2.9 ***(Teorema del punto fijo de Brouwer en dimensión 1).***

Sean $Q := [-1,1] \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$, $\Delta = \{(x,x) \in Q : x \in [-1,1]\}$ su diagonal principal y $f : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$ una función continua. Muestre que la gráfica de f y la diagonal Δ siempre se cortan, es decir que existe $\xi \in [-1,1]$ tal que $f(\xi) = \xi$.



Este teorema es válido en dimensiones mayores pero su demostración es más complicada y se ve en los cursos de análisis matemático y topología.

Ejercicio 4.2.10 *Sean $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas tales que satisfacen que $f(a) < g(a)$ pero $f(b) > g(b)$. Muestre que existe $x_0 \in (a,b)$ con $f(x_0) = g(x_0)$.*

Sugerencia: *Considere $f - g$.*

Ejercicio 4.2.11 *Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(0) = f(1)$. Muestre que existe $x_0 \in [0,1/2]$ de tal forma que $f(x_0) = f(x_0 + 1/2)$.*
Sugerencia: *Utilice el ejercicio anterior con $f|_{[0,1/2]}$ y $g : [0,1/2] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) := f(x + 1/2)$.*

Ejercicio 4.2.12 *¿Cuántas funciones continuas $f : (0,1) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ existen con la siguiente propiedad: $f(x)^2 = x^2 \; \forall x \in (0,1)$?*

Ejercicio 4.2.13 *Sea $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que para cada $x \in [-1,1]$ se tiene que $x^2 + f(x)^2 = 1$ (esto nos dice que la gráfica de f es parte del círculo unitario del plano). Muestre que* ***para toda*** *$x \in [-1,1]$ se tiene que $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ o bien* para toda *$x \in [-1,1]$ se tiene $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$.*

4.3. Teoremas de máximos y mínimos de funciones continuas sobre intervalos cerrados

Con esencialmente la misma prueba que se dio en el lema 4.2.1, la proposición 3.2.4 se puede refinar para el caso de intervalos cerrados al siguiente resultado.

Lema 4.3.1 *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $x_0 \in D$, se tiene entonces que existe $\delta > 0$ tal que f es acotada en la región indicada*

a) $x \in [a, a+\delta] \subset [a,b]$*, en el caso* $x_0 = a$*,*

b) $x \in [b-\delta, b] \subset [a,b]$*, en el caso* $x_0 = b$*,* *c)* $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a, b]$*, en el caso* $x_0 \in (a, b)$*.*

Acotada *significa que el conjunto* $\{|f(x)| : x \in R\}$ *es acotado superiormente, donde* R *es la región respectiva.*

Como se dijo antes, la prueba es la misma que en el lema 4.2.1, únicamente se tiene que usar (sustituir) $\delta/2$ por δ para lograr que el intervalo correspondiente sea cerrado y permanezca en $[a, b]$.

4.3.1. Continuas sobre cerrados son acotadas

A continuación se va demostrar el resultado (que es de suma importancia tanto en cuestiones teóricas como en aplicaciones prácticas) de que las funciones continuas sobre intervalos cerrados son *globalmente* acotadas.

Teorema 4.3.1 *Si* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua entonces* f *es acotada.*

Demostración: Supongase por el contrario que f no fuera acotada, entonces cada $n \in \mathbb{N}$ no sería cota superior del conjunto $\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$, por lo que existiría $x_n \in [a, b]$ de tal forma que $|f(x_n)| > n$.
Ahora bien, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a, b]$ se tiene del teorema de Bolzano-Weierstrass (teo. 2.6.1) que existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergiendo a algún punto x_0. Observe que de la monotonía al límite y $a \leq x_n \leq b$ para toda $n \in \mathbb{N}$ se sigue que $x_0 \in [a, b]$. Como f es continua en x_0 la sucesión $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x_0)$ y por lo tanto debe ser una sucesión acotada (teo. 2.2.1). Sin embargo esto contradice la construcción de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ya que:

$$|f(x_{n_k})| > n_k \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N}\,,$$

con lo que $\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$ no puede ser acotado superiormente al contener un subconjunto que no es acotado superiormente.

$\square$

Una prueba un tanto diferente, basada en un método de bisección (como en la demostración del teorema de Bolzano 4.2.1) se puede leer en libro de Apostol (ver [2, pag. 185]). Otra prueba muy diferente puede verse en el libro de Spivak (ver [6]). Para que el lector tenga oportunidad de repasar el uso de supremos y el axioma de completez, se deja a manera de ejercicio (y con ligeras modificaciones para hacer la prueba más clara y simple) el reproducir la prueba dada por Spivak (vea el ejercicio 4.3.1). El lema 4.3.1 será muy útil para resolver dicho ejercicio.

4.3.2. Continuas alcanzan máximos y mínimos.

Las funciones continuas sobre *intervalos cerrados* alcanzan (toman) su valor máximo y mínimo, como lo muestra el siguiente resultado bien conocido.

Teorema 4.3.2 *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua, se tiene entonces que* f *alcanza su máximo y su mínimo en* $[a,b]$. *De modo preciso: si* $M(f) := \sup f[a,b]$ *y* $m(f) := \inf f[a,b]$ *entonces existen* $x_1, x_2 \in [a,b]$ *con* $M(f) = f(x_1)$ *y* $m(f) = f(x_2)$.

Antes de la demostración debe observarse que $M = M(f)$ y $m = m(f)$ son efectivamente máximo y mínimo (no solo supremo e ínfimo respectivamente, que existen por el teorema 4.3.1) del conjunto $f([a,b]) = \{f(x) : x \in [a,b]\}$.

Demostración: Se comenzará por ver que se alcanza el máximo. Usando el teorema 1.5.4 se puede encontrar, para cada $n \in \mathbb{N}$, un elemento $d_n \in [a,b]$ con $M - 1/n < f(d_n) \leq M$. Del teorema de Bolzano-Weierstrass (teo. 2.6.1) es posible tomar una subsucesión $(d_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a un número x_1. Observe que $d_n \in [a,b]$ para toda $n \in \mathbb{N}$ implica que $x_1 \in [a,b]$.
Ahora bien, de la continuidad de f en x_1 se sigue, del hecho que $d_{n_k} \longrightarrow x_1$, que $f(d_{n_k}) \longrightarrow f(x_1)$. Sin embargo del hecho de que $M - 1/n < f(d_n) \leq M$ y la ley de estricción (teo. 2.4.2) se sabe que $f(d_n) \longrightarrow M$ así que en particular $f(d_{n_k}) \longrightarrow M$. Se concluye de la unicidad del límite que $M = f(x_1)$.
Ahora toca el turno de verificar que se alcanza el mínimo.
Se puede proceder de forma análoga a la parte anterior o bien se puede reducir a ésta considerando la función $-f$ y notando que $m(f) = -M(-f)$ (repase el ejercicio 1.5.11). $\square$

Tanto Apostol como Spivak dan en sus libros (ver [2, Teorema 3.12] y [6]) pruebas en esencia diferentes a la dada aquí del teorema anterior. Ambos proceden por contradicción y consideran la función continua $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/(M - f(x))$; Apostol contradice la minimalidad de M como cota superior y Spivak el que g sea acotada (teorema 4.3.1). La prueba presentada aquí no requiere el teorema 4.3.1, mas que para saber la existencia de $M(f)$ y $m(f)$.

4.3.3. Continuas sobre intervalos cerrados son uniformemente continuas.

Se comienza esta sección con la definición de continuidad uniforme, concepto que es muy útil en teoría de integración y espacios de funciones.

Definición 4.3.1 *Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es* uniformemente continua *si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ con:*

$$x, y \in D \,, |x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \,.$$

La definición difiere en la de continuidad en la *universalidad* del δ, aquí no hay un punto prefijado $a \in D$, del que normalmente depende δ (además de la dependencia de ε que es obvia). El siguiente ejemplo clásico aclara la diferencia.

Ejemplo 4.3.1 *Sea $D = (0,1)$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = 1/x$. Se sabe que f es continua por las PA-FC, sin embargo no es uniformemente continua. En efecto, si f fuera uniformemente continua entonces para $\varepsilon := 1/2$ debería existir $\delta_0 > 0$ con $|1/x - 1/y| < \varepsilon = 1/2$ siempre que $x, y \in (0,1)$ y $|x-y| < \delta_0$. Sin embargo, dado cualquier $\delta > 0$ es posible tomar (por la propiedad arquimediana) $N \in \mathbb{N}$ con $1/N < \delta$, en particular para $n > m \geq N$ se tiene que $1/n, 1/m \in (0,1)$, $|1/m - 1/n| < 1/m \leq 1/N < \delta$ pero*

$$|f(1/m) - f(1/n)| = |m - n| \geq 1 > 1/2 = \varepsilon \,,$$

lo anterior muestra que tal δ_0 no puede existir, contradiciendo entonces que f es uniformemente continua.

La siguiente proposición es clara y no requiere demostración.

Proposición 4.3.1 *Toda función uniformemente continua es en particular continua.*

El teorema importante de esta sección es el siguiente, con el cual se finaliza este capítulo.

Teorema 4.3.3 *Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Si D es un intervalo cerrado entonces f es uniformemente continua.*

Demostración: Sea $D = [a, b]$ y supongase por lo contrario que f no fuera uniformemente continua. Sea $\varepsilon > 0$ de tal modo que para toda $\delta > 0$ es posible econtrar $x_\delta, y_\delta \in [a, b]$ con $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ y$|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$. En particular se puede encontrar sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $D = [a, b]$ de tal forma que $|x_n - y_n| < 1/n$ y $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.
Ahora bien, como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a, b]$, por el teorema de Bolzano-Weierstrass (teorema 2.6.1), se puede tomar una subsucesión $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente, sea L su límite. Como $a \leq y_n \leq b_n$ para toda n se tiene que $L \in [a, b]$.
Claramente $(y_n - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 pues $|y_n - x_n| < 1/n$; se tiene ahora de $x_n = y_n - (y_n - x_n)$ y las PA-SC que $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ también converge a L.
Como f es continua en L (proposición anterior) se tiene que ambas $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ y $(f(y_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ convergen a $f(L)$, de donde la sucesión de diferencias $(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a 0, esto es sin embargo imposible pues $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

$\square$

4.3.4. Ejercicios.

Ejercicio 4.3.1 *El objetivo de este ejercicio es dar otra demostración del teorema 4.3.1 a la Spivak.*
Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua. Defina el conjunto*

$$\mathcal{A} = \{x \in [a, b] : f \textit{ está acotada en } [a, x]\}.$$

Demuestre cada una de las siguientes afirmaciones.

- *Se puede encontrar* $\delta_1 > 0$ *de tal forma que* $a + \delta_1 \in \mathcal{A}$*.*
- *Existe* $x_0 := \sup(\mathcal{A})$ *y* $x_0 \in (a, b]$.
- *Si se tuviera* $x_0 < b$ *tome* $\delta > 0$ *tal que* $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a, b]$ *y tal que* f *es acotada en* $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$*. Llegue ahora a alguna contradicción y concluya que* $x_0 = b$*.*
- *Muestre que* $x_0 = \text{máx}(\mathcal{A})$*, es decir que* $\sup(\mathcal{A}) \in \mathcal{A}$*.*

Concluya de lo anterior que f *es acotada en todo* $[a, b]$*.*
Sugerencia: *Para llegar a una contradicción en el tercer punto use el teorema 1.5.4.*

Ejercicio 4.3.2 *Explique por qué la demostración dada para el teorema 4.3.1 falla si el intervalo no fuera cerrado.*

Ejercicio 4.3.3 *Demuestre que no importa qué valor tome* $L \in \mathbb{R}$*, la función* $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada a continuación no puede ser continua:* $f(x) = 1/x$ *si* $x \neq 0$ *y* $f(0) = L$*.*

Ejercicio 4.3.4 *Sea* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua. Demuestre que el conjunto imagen* $f[a, b] := \{f(x) : x \in [a, b]\}$ *es un intervalo cerrado.*
Sugerencia: *Demuestre que* $f[a, b] = [m(f), M(f)]$*.*

Ejercicio 4.3.5 *Dé un ejemplo de una función* $s : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$ *la cual satisfaga la conclusión del teorema del valor intermedio en* todo *el intervalo* $[-1,1]$*, que alcance su máximo y su mínimo pero la cual* ***no*** *sea continua.*

Ejercicio 4.3.6 *¿En qué punto falla la demostración del teorema 4.3.3 si* D *no fuera un intervalo cerrado?*

Ejercicio 4.3.7 *Demuestre que la función* $f : (1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $x \mapsto \sqrt{x}$ *es uniformemente continua.*
Sugerencia: $\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|\left|\sqrt{x}+\sqrt{y}\right| = |x-y|$.

Ejercicio 4.3.8 *Suponga que* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *es uniformemente continua. Muestre que para toda sucesión de Cauchy* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *se tiene que la sucesión* $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *es de Cauchy.*

Ejercicio 4.3.9 *Sea* $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función la cual es uniformemente continua.*

- *Demuestre que para cualesquiera dos sucesiones convergentes* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (a,b)$*,* $a_n \longrightarrow a$ *y* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (a,b)$*,* $b_n \longrightarrow b$ *se tiene que* $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(f(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *son convergentes.*

- *Sean* $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (a,b)$ *otras sucesiones convergentes a* a *y* b *respectivamente. Muestre que* $(f(a_n)-f(a'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(f(b_n)-f(b'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *convergen a* 0.

- *Concluya de lo anterior que los límites de* $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(f(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *son independientes de las sucesiones* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergiendo a* a *y* b *respectivamente.*

- *Demuestre que existe una función* $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua y tal que* $F|_{(a,b)} = f$.

Parte III

Diferenciabilidad y sus aplicaciones

5

La derivada

5.1. Conceptos y ejemplos básicos

En todo este capítulo siempre que se diga que $I \subset \mathbb{R}$ es un **abierto** se referirá a que es un intervalo abierto, un rayo abierto, unión de algunos de estos o bien todo $\mathbb{R}$; para cuando I es abierto se escribirá $I \subset_{ab} \mathbb{R}$.

Definición 5.1.1 *Sea $I \subset \mathbb{R}$ abierto y $a \in I$. Se dice que una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es* ***derivable*** *en a si existe el límite*

$$f'(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}.$$

Al valor $f'(a)$ se le llama la ***derivada*** *de f en a.*

Debe observarse que, a simple vista, pareciera que se tiene (por ejemplo si la función f es continua en a) una indeterminación del tipo $0/0$, pero realmente no es el caso, pues el límite se toma al cociente y no a cada parte del cociente (de hecho **no** puede aplicarse las PAL).

El siguiente resultado muestra que la familia de transformaciones afines consta de funciones derivables.

Proposición 5.1.1 *Sea* $I \subset \mathbb{R}$ *abierto y sean* $c, d \in \mathbb{R}$. *Considere la función afín* $T = T_{c,d} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $T(x) = cx + d$. *Se tiene entonces que* T *es derivable en* a *y además* $T'_{c,d}(a) = c$. *De modo particular, se tiene que las funciones constantes son derivables con derivada* 0 *en todo punto y que la función identidad es derivable con derivada* 1 *en todo punto.*

Demostración: La segunda parte es consecuencia de la primera, pues las funciones constantes son de la forma $T_{0,d}$ y la identidad es de la forma $T_{1,0}$.
Para la primera parte debe observarse que, para t suficientemente pequeño (para que $a + t \in I$),

$$\frac{T_{c,d}(a+t) - T_{c,d}(a)}{t} = \frac{[c(a+t)+d] - [ca+d]}{t} = \frac{ct}{t} = c$$

de donde existe el límite en cuestión y además es igual a c. $\square$

Una observación importante (consecuencia de las propiedades básicas de límites) es que, en caso de que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sea derivable en $a \in I$, se tiene

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Ejemplo 5.1.1 *Para la función polinomial* $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $p(x) = 5x^2$ *se tiene que* $p'(7/2) = 35$.
En efecto,

$$\frac{p(x) - p(7/2)}{x - 7/2} = \frac{5x^2 - 5(7/2)^2}{x - 7/2} = \frac{5(x - 7/2)(x + 7/2)}{x - 7/2} = 5(x + 7/2)$$

de donde

$$\lim_{x\to 7/2}\frac{p(x)-p(7/2)}{x-7/2}=\lim_{x\to 7/2}5(x+7/2)\underset{PAL}{=\!=}5(7/2+7/2)=35.$$

Ejemplo 5.1.2 *La función valor absoluto* $abs:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *(vea ejemplo 3.2.4) no es derivable en* $a=0$*.*
En efecto, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión arbitraria de números positivos y* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números negativos. Se tiene que*

$$\frac{abs(0+x_n)-abs(0)}{x_n}=\frac{|x_n|}{x_n}=1\,,$$
$$\frac{abs(0+y_n)-abs(0)}{y_n}=\frac{|y_n|}{y_n}=-1\,.$$

De lo anterior se sigue que no puede existir $\lim\limits_{t\to 0}\frac{abs(0+t)-abs(0)}{t}$ *(teorema 3.3.1).*

A manera de proposición se enuncian ahora unas consecuencias de los límites notables estudiados en la sección 3.4.

Proposición 5.1.2 *Las funciones* sen*,* $\cos$ *y exponencial* $x\mapsto a^x$ *(donde* $a>0$*) son derivables y además se tiene que*

- $\operatorname{sen}'(c)=\cos(c)$, $\cos'(c)=-\operatorname{sen}(c)$,
- $(a^x)'(c)=a^c\ln(a)$.

Demostración: Para el primer punto observe que

$$\frac{\operatorname{sen}(c+t)-\operatorname{sen}(t)}{c}=\frac{[\operatorname{sen}(c)\cos(t)+\cos(c)\operatorname{sen}(t)]-\operatorname{sen}(c)}{t}$$
$$=\operatorname{sen}(c)\left(\frac{\cos(t)-1}{t}\right)+\cos(c)\left(\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\right)$$

Con lo anterior y los teoremas 3.4.1 y 3.4.2 se tiene que

$$\operatorname{sen}'(c)=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(c+t)-\operatorname{sen}(t)}{c}\underset{PA-LF}{=\!=}\operatorname{sen}(c)0+\cos(c)1=\cos(c),$$

La prueba de $\cos'(c) = -\operatorname{sen}(c)$ es muy similar y se deja como ejercicio al lector.
Para demostrar el segundo punto basta recordar el ejercicio 3.4.4:

$$\frac{a^{c+t}-a^c}{t} = a^c\left(\frac{a^t-1}{t}\right) \xrightarrow[PA-LF]{} a^c\ln(a).$$

$\square$

5.2. Propiedades aritméticas y regla de la cadena

Después de haber visto un par de ejemplos lo que sigue es estudiar las propiedades básicas de las funciones derivables.

5.2.1. Continuidad como condición necesaria para la derivabilidad

Proposición 5.2.1 *Sean $I \subset_{ab} \mathbb{R}$ abierto y $a \in I$. Toda función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en $a \in I$ es continua en a.*

Demostración: Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $a \in I$. Ahora bien, si $x \in I - \{a\}$ entonces

$$f(x) = f(a) + (x-a)\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$$

de donde al usar PAL y que f es derivable en a se sigue que

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) + 0f'(a) = f(a)$$

lo cual muestra la continuidad de f en a. $\square$

La continuidad es entonces una condición necesaria para la derivabilidad, sin embargo **no es suficiente** como lo demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.2.1 *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \textit{si } x \neq 0 \\ 0 & \textit{si } x = 0. \end{cases}$$

Por el ejercicio 3.3.12 se sabe que esta función es continua en $a = 0$, sin embargo no es derivable, pues para $t \neq 0$ se tiene

$$\frac{f(0+t) - f(0)}{t} = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right);$$

con lo que el límite $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(0+t)-f(0)}{t}$ no puede existir según el ejemplo 4.1.2, es decir, f no es derivable en $a = 0$.

Una consecuencia sencilla (pero interesante) de la proposición 5.2.1 es la siguiente.

Corolario 5.2.1 *Sea $a \in I \subset_{ab} \mathbb{R}$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en a. Se tiene que la función f^2 es también derivable en a y además $(f^2)'(a) = 2f(a)f'(a)$.*

Demostración: Basta recordar que la continuidad de f en a dice que $\lim\limits_{t \to 0} f(a+t) = f(a)$ y utilizar ahora las PA-LF notando que

$$\frac{f^2(a+t) - f^2(a)}{t} = [f(a+t) + f(a)] \left(\frac{f(a+t) - f(a)}{t}\right)$$

$\square$

5.2.2. Ejercicios.

Ejercicio 5.2.1 *Sea* $f : I \subset_{ab} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivable en* $a \in I$.

- *Demuestre que para cualquier constante* $c \in \mathbb{R}$ *se tiene que* cf *es derivable en* a *con* $(cf)'(a) = cf'(a)$.
- *Usando la misma técnica del corolario 5.2.1 muestre que* f^4 *es derivable también en* a *y de hecho* $(f^4)'(a) = 4f^3(a)f'(a)$.
- *Utilizando el ejercicio 1.3.11 generalice lo anterior mostrando que* f^n *es derivable en* a *y además* $(f^n)'(a) = nf^{n-1}(a)f'(a)$.
- *Escriba los resultados para el caso particular en que* f *es la función identidad.*

Ejercicio 5.2.2 *En cada caso demuestre que la función* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada es derivable en* $a \in \mathbb{R}$ *y encuentre la derivada.*

- $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$,
- $f(x) = \operatorname{sen}(3x)$,
- $f(x) = 5x^2 + 2\operatorname{sen}(4x)$.

Ejercicio 5.2.3 *Sea* $I \subset \mathbb{R}$ *abierto y sean* $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$. *Muestre que si* g *es continua en* a *y* $f(x) = (x-a)g(x)$ *entonces* f *es derivable en* a *y encuentre el valor de* $f'(a)$.
Repita el problema anterior, donde ahora la relación entre f *y* g *está dada por* $f(x) = (x^2 - a^2)g(x)$.

Ejercicio 5.2.4 *Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *la cual satisface las siguientes condiciones:*

- $f(0) = 1$ *y* $f'(0)$ *existe,*
- *para cualesquiera* $a, b \in \mathbb{R}$ *se vale* $f(a+b) = f(a)f(b)$.

Demuestre que entonces $f'(x)$ *existe para cualquier* x *y de hecho se cumple que* $f'(x) = f'(0)f(x)$.

5.2.3. Propiedades aritméticas

Los ejercicios de la sección anterior son casos particulares de propiedades más generales, que se enunciarán a continuación, estas propiedades se citarán como PA-FD (propiedades aritméticas de funciones derivables).

Teorema 5.2.1 *Sean* $f, g : I \subset_{ab} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones derivables en* $a \in I$.

i) *La función suma* $f + g$ *es derivable en* a *y la derivada satisface que* $(f+g)'a = f'(a)+g'(a)$. *Más generalmente cualquier combinación lineal* $\lambda f + \mu g$ *es derivable en* a *con* $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$.

ii) ***(Regla de Leibniz)*** *La función producto* fg *es derivable en* a *con* $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

iii) *Si* $g(a) \neq 0$ *entonces la función recíproca* $1/g$ *está bien definida en un abierto* $U \subset I$ *con* $a \in U$ *y es derivable en* a *con* $(1/g)'(a) = -g'(a)/g(a)^2$. *De modo más general se tiene, bajo las mismas circunstancias, que* f/g *es derivable en* a *con*

$$(f/g)'(a) = \left(1/g(a)^2\right)\left[g(a)f'(a) - f(a)g'(a)\right].$$

Demostración: Prácticamente todo es consecuencia de PA-LF.
$i)$ Para la primera parte basta notar que

$$\frac{(f+g)(a+t)-(f+g)(a)}{t}=\frac{f(a+t)-f(a)}{t}+\frac{g(a+t)-g(a)}{t}.$$

La segunda parte (sobre combinaciones lineales) se sigue ahora de esto junto con el primer punto del ejercicio 5.2.1.
$ii)$ Debe observarse la identidad

$$\frac{(fg)(a+t)-(fg)(a)}{t}=f(a+t)\left(\frac{g(a+t)-g(a)}{t}\right)+g(a)\left(\frac{f(a+t)-f(a)}{t}\right)$$

por lo que por la continuidad en a de la función f (proposición 5.2.1) y las PA-LF se sigue la regla de Leibniz.
$iii)$ La primera parte es una pequeña modificación de los teoremas sobre preservación del signo (compare el teorema 3.2.2 y el lema 4.2.1), por lo que queda de ejercicio al lector describir el abierto U. La segunda parte (la derivada de $1/g$ en a) es consecuencia (nuevamente) de las PA-LF, la proposición 5.2.1 y la siguiente manipulación algebraica

$$\frac{(1/g)(a+t)-(1/g)(a)}{t}=-\left(\frac{g(a+t)-g(a)}{t}\right)\left(\frac{1}{g(a)g(a+t)}\right).$$

Por último, la parte del cociente resulta de aplicar la regla de Leibniz y lo anterior observando que $f/g=(1/g)f$. $\square$

Una consecuencia del teorema anterior y el tercer punto del ejercicio 5.2.1 es que toda función polinomial es derivable, como se precisa a continuación.

Corolario 5.2.2 *Sean $n\in\mathbb{N}_0$ y $c_0,c_1,\cdots,c_n\in\mathbb{R}$ constantes dadas. Sea $I\subset_{ab}\mathbb{R}$ y considere $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ la función polinomial dada por $f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$. Se tiene entonces que f es derivable en todo punto $a\in I$ y además*

$$f'(a)=c_1+2c_2a+3c_3a^2+\cdots+nc_na^{n-1}.$$

5.2.4. Regla de la cadena

El siguiente resultado será referenciado en el texto como RC.

Teorema 5.2.2 (Regla de la cadena) *Sean $I, J \subset \mathbb{R}$ abiertos y sean $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(I) \subset J$. Si f es derivable en $a \in I$ y g es derivable en $b := f(a)$, se tiene entonces que $g \circ f$ es derivable en a y más aún se vale*

$$(g \circ f)'(a) = g'(b)f'(a).$$

Demostración: Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $I - \{a\}$ la cual converge a a. Se requiere demostrar (teorema 3.3.1) que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(g \circ f)(x_n) - (g \circ f)(a)}{x_n - a} = g'(b)f'(a).$$

De la continuidad de f se tiene que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} := (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset J$ converge a $b = f(a)$, con esto se tiene que la sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida mediante

$$z_n := \begin{cases} \frac{g(y_n)-g(b)}{y_n-b} & \text{si } f(x_n) \neq b \\ g'(b) & \text{si } f(x_n) = b \end{cases}$$

converge a $g'(b)$ (el lector debe verificar los detalles, es un ejercicio de sucesiones). Más aún *para todo* $n \in \mathbb{N}$ se satisface
$z_n(y_n - b) = g(y_n) - g(b)$.
Con esto último, la clave ahora consiste en observar que

$$\begin{aligned} \frac{(g \circ f)(x_n) - (g \circ f)(a)}{x_n - a} &= \frac{g(y_n) - g(b)}{x_n - a} \\ &= \frac{z_n(y_n - b)}{x_n - a} = z_n \left(\frac{f(x_n) - f(a)}{x - a} \right) \end{aligned}$$

Con esto y las PA-SC se sigue directamente que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{(g\circ f)(x_n)-(g\circ f)(a)}{x_n-a} &= \left(\lim_{n\to\infty} z_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(a)}{x-a}\right)\\ &= g'(b)f'(a).\end{aligned}$$

$\square$

El siguiente resultado es una consecuencia sencilla de la RC, más adelante se presentará una forma aún más general.

Corolario 5.2.3 *Sea* $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función derivable en el punto* $c \in (a,b)$ *y tal que* $f(a,b) \subset \mathbb{R}$ *es abierto. Si* f *es invertible con inversa* $f^{-1} : f(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivable en* $d := f(c)$ *entonces se satisface que* $f'(c) \neq 0$ *y además* $(f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'(c)}$.

Demostración: Todo se sigue de derivar la igualdad $f^{-1}(f(x)) = x$ en $x = c$ usando la RC y $f(c) = d$, se tiene $(f^{-1})'(f(c))f'(c) = 1$. $\square$

5.2.5. Ejercicios

Ejercicio 5.2.5 *Utilizando ahora la regla de Leibniz, de otra solución al primer y tercer punto ejercicio 5.2.1 (el tercer punto requerirá usar inducción).*

Ejercicio 5.2.6 *Apóyese de la RC para derivar* $f(x) = \operatorname{sen}^3(5x+1)$.

Ejercicio 5.2.7 *Sea* $\mathbb{1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *la función identidad y sean* $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones que son derivables y que además cumplen que* $f(0) = g(0) = 0$*. Muestre que entonces no puede darse la igualdad* $fg = \mathbb{1}$.

5.3. Unas palabras sobre diferenciabilidad

Esta sección es dedicada a analizar el concepto de diferenciabilidad; muchos autores omiten esto pues, como se verá en breve, es equivalente el que una función sea diferenciable con el que sea derivable. Esto **no** es el caso en *dimensiones mayores*, como se ve en los cursos de cálculo vectorial.

Definición 5.3.1 *Sean $I \subset \mathbb{R}$ abierto y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dada. Se dice que f es* ***diferenciable*** *en $a \in I$ si existe una función $Df_a : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en a y de tal modo que para toda $x \in I$ se cumple que*

$$f(x) = f(a) + Df_a(x)(x - a).$$

Al valor $Df_a(a)$ se le denotará por $\frac{df}{dx}(a)$.

Ejemplo 5.3.1 *Funciones diferenciables.*

a) Toda función constante $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en cada punto de su dominio.

b) La función identidad $\mathbb{1} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en todo punto de su dominio.

En efecto, en el primer caso basta tomar Df_a la función constante cero (es continua) y observar que

$$f(x) = f(a) = f(a) + 0(x - a).$$

Para el segundo caso se toma a Df_a como la función constante 1, funciona por la siguiente identidad

$$\mathbb{1}(x) = x = a + 1(x - a)$$

Para familiarizarse con el concepto de función diferenciable se recomienda al lector resolver en este punto el ejercicio 5.3.1.

5.3.1. Equivalencia entre derivabilidad y diferenciabilidad.

Como se mencionó anteriormente el que una función (real de variable real) sea diferenciable en a es equivalente a que sea derivable en a. Esto es el material del siguiente teorema.

Teorema 5.3.1 *Sean $I \subset_{ab} \mathbb{R}$, $a \in I$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Las siguientes afirmaciones sobre f son equivalentes*

i) f es diferenciable en a.

ii) f es derivable en a.

En caso de que se de alguna (y entonces ambas) se tiene la igualdad $\frac{df}{dx}(a) = f'(a)$.

Demostración: Son dos las implicaciones a demostrar.
$\boxed{i) \Rightarrow ii)}$ Se tiene una función $Df_a : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en a la cual satisface que

$$f(x) = f(a) + Df_a(x)(x-a).$$

De la continuidad se tiene que $\lim\limits_{x\to a} Df_a(x) = Df_a(a) = \frac{df}{dx}(a)$ y entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} Df_a(x) = \frac{df}{dx}(a)$$

de donde existe $f'(a)$ y además coincide con $\frac{df}{dx}(a)$.
$\boxed{ii) \Rightarrow i)}$ Basta definir $Df_a : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$Df_a(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Por la derivabilidad de f en a se tiene que Df_a es continua en a y de hecho, por la construcción $Df_a(a) = f'(a)$. $\square$

Por el resultado anterior es que, en lo subsecuente, se usarán las palabras *diferenciable* y *derivable* indistintamente.

5.3.2. Ejercicios

Ejercicio 5.3.1 *Usando directamente la definición, demuestre que se valen propiedades análogas a las PA-FD para funciones diferenciables. De modo explícito, sea $I \subset \mathbb{R}$ abierto y sean $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciables en $a \in I$. Se valen entonces cada una de las siguientes afirmaciones.*

- $f + g$ *es diferenciable en* a *y además* $D(f+g)_a = Df_a + Dg_a$.
- fg *es diferenciable en* a *con*

$$D(fg)_a(x) = f(a)Dg_a(x) + g(a)Df_a(x) + Df_a(x)Dg_a(x-a).$$

- *Si* $g(a) \neq 0$ *entonces* $(1/g)$ *(que ya se sabe que está bien definido en un abierto* $U \subset I$*) es diferenciable en* a *con*

$$D(1/g)_a(x) = -\frac{Dg_a(x)}{g(x)g(a)}.$$

- *Evalúe en* a *cada uno de los resultados anteriores para escribir los resultados en términos de* $\frac{df}{dx}(a)$ *y* $\frac{dg}{dx}(a)$

6

Sobre extremos locales y globales

Este capítulo contiene el análisis clásico de extremos de una función. Nuevamente se aclara que el énfasis está en la demostración de los resultados y la teoría conocida antes que en sus aplicaciones. Las aplicaciones son variadas y seguramente se estudiaron ampliamente en un curso de introducción al cálculo, por lo que aquí no se ahondará en dichas aplicaciones. Si el lector no tuvo ocasión de practicar aplicaciones de esta parte de la teoría, se le sugiere ampliamente hacer una pausa en la lectura e ir a un libro práctico de cálculo diferencial, como lo es el libro clásico de Leithold [5].

6.0.1. Derivada como función

Antes de empezar de lleno con el análisis de extremos es conveniente dar unas palabras sobre derivadas como función.
Sean $I \subset \mathbb{R}$ abierto y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si f es derivable en cada punto de I entonces se obtiene una función $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$, que se le llama **función derivada de** f, mediante

$x \mapsto f'(x)$. Si la función $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es nuevamente derivable en cada uno de sus puntos entonces se puede obtener nuevamente una función $f'' : I \longrightarrow \mathbb{R}$, llamada la **función segunda derivada**, mediante $x \mapsto (f')'(x)$.
En general, si $f^{(k)}$ denota a la función k-ésima derivada y ésta es derivable en cada punto de I entonces se define la función $(k+1)$-ésima derivada mediante $f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x)$.
Se conviene con esto que $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$ y $f^{(0)} = f$.

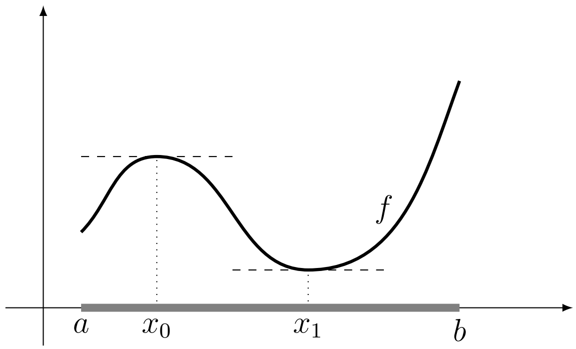
6.1. Extremos locales

En esta sección se dará el análisis clásico de valores extremos de una función continua sobre un intervalo cerrado. Ya se ha visto (ver teo.4.3.2) que las funciones continuas alcanzan su máximo y su mínimo, lo que ahora se hará es describir un método para encontrar puntos en el dominio en donde se alcancen dichos valores. Se comenzará por describir los conceptos de extremos (máximos o mínimos) de manera local.

Definición 6.1.1 *Sean $D \subset \mathbb{R}$ no vacío y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f tiene un **máximo local** (respectivamente **mínimo local**) en $c \in D$ si existe un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ que contiene a c y de tal modo que para todo $x \in D \cap I$ se tiene que $f(x) \leq f(c)$ (respectivamente $f(x) \geq f(c)$). Se le llama **extremo local** a cualquiera de máximo o mínimo local.*

De la definición anterior se sigue que $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene un máximo local en $c \in D$ si existe un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ para el cual la función $f|_{D\cap I}$ alcanza un máximo en c, es decir $f(c) =$

$\sup f(D \cap I)$. De manera similar se tiene para un mínimo local. Otra cosa importante a notar es que puede haber varios máximos o mínimos locales, en la siguiente figura se tiene la gráfica de una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la cual tiene un máximo local en x_0 y otro en b, de hecho b es un máximo global (i.e. es máximo del conjunto $f(D)$); la función representada tiene mínimos locales en a y en x_1, estando en x_1 un mínimo global.



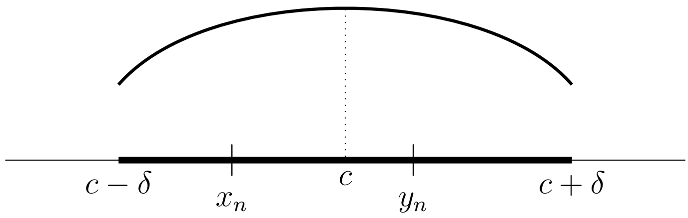
Es posible también que la función alcance una infinidad de veces su valor máximo o mínimo (o ambos). Si el dominio es general, puede darse también el caso que una función (incluso con regla de asignación *sencilla*) no posea máximos ni mínimos locales, esto se muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.1.1 *Considere la función identidad* $\mathbb{1} : (0, 1) \longrightarrow (0, 1)$. *Observe que si* $c \in (0, 1)$ *entonces para cualquier intervalo abierto* $I \subset \mathbb{R}$ *se podrán encontrar* $x_0, x_1 \in (0, 1) \cap I$ *de tal forma que* $x_0 < c < x_1$ *(densidad de racionales) y con eso* $\mathbb{1}(x_0) < \mathbb{1}(c) < \mathbb{1}(x_1)$, *es decir, en* c *no se tiene ni máximo ni mínimo local.*

El siguiente resultado es clave en el análisis de extremos.

Teorema 6.1.1 (Anulación de la derivada en un extremo interior) *Sea* $I \subset \mathbb{R}$ *abierto y sea* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función que posee un máximo local (o mínimo local) en* $c \in I$*. Si* f *es diferenciable en* c *entoces se tiene* $f'(c) = 0$*.*

Demostración: Se analizará solo el caso en que en $c \in I$ se tiene un máximo local, siendo el caso del mínimo completamente análogo. De la definición se tiene que existe un intervalo abierto $J \subset \mathbb{R}$ de tal modo que $f|_{I\cap J}$ alcanza su máximo sobre $c \in I \cap J$. Se puede suponer que $J = (c - \delta, c + \delta) \subset I$ con $\delta > 0$. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (c - \delta, c)$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (c, c + \delta)$ sucesiones convergiendo a c.



Por la construcción de las sucesiones se tiene que

$$\frac{f(y_n) - f(c)}{y_n - c} \leq 0 \leq \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c}$$

y al tomar límite cuando $n \to \infty$ se obtiene, por la monotonía al límite (teorema 2.4.1), que $f'(c) \leq 0 \leq f'(c)$ de donde, por la tricotomía se concluye que $f'(c) = 0$. $\square$

El teorema anterior dice que, para funciones diferenciables, la anulación de la derivada es una condición necesaria para tener extremos locales en el interior; dicha condición *no* es suficiente como lo demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.1.2 *Sea* $n \in \mathbb{N}$ *un entero impar; considere la función* $f : (-1, 1) \longrightarrow (-1, 1)$ *dada por* $x \mapsto x^n$*. Se tiene que* $f'(0) =$

$n(0)^{n-1} = 0$ *y sin embargo* f *no tiene extremo local en* $c = 0$ *por la imparidad de* n *(el lector debe verificar los detalles).*

También la condición de que I sea abierto no puede ser omitida en el teorema 6.1.1.

Ejemplo 6.1.3 *La función identidad* $\mathbb{1} : (0,1] \longrightarrow (0,1]$ *tiene un máximo local (que es absoluto) en* $c = 1$*, sin embargo para la derivada se tiene que* $\mathbb{1}'(1) = 1 \neq 0$.

Considerando todos los ejemplos anteriores vemos que no hay esperanza de tener un método general para hallar extremos locales (globales) en dominios arbitrarios. Para cuando el dominio es un intervalo cerrado $[a,b]$ y la función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable (y por lo tanto continua) en todo punto, se sabe por el teorema 4.3.2 que los extremos tienen que alcanzarse. Ahora bien, después de analizar los valores $f(a)$ y $f(b)$, si en estos no se encuentran los extremos buscados, es porque dichos extremos se encuentran en (a,b) y por lo tanto pueden buscarse utilizando el teorema de la anulación de la derivada (teorema 6.1.1).
Todo esto que se acaba de discutir se resume a continuación, no sin antes dejar la definición de punto crítico.

Definición 6.1.2 *Sea* $D \subset \mathbb{R}$ *un conjunto que tiene a* $c \in D$ *como punto de contacto. Sea* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función derivable en* c*. Si* $f'(c) = 0$ *se dice que* c *es un punto crítico y que* $f(c)$ *es un valor crítico de la función.*

Procedimiento para hallar los extremos (absolutos) para funciones derivables definidas sobre intervalos cerrados

Se tiene una función derivable $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ con una cantidad finita de puntos críticos.

i) Se hallan todos los puntos críticos de $f|_{(a,b)}$, sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todos los puntos críticos.

ii) Se calcula el valor de $f(c)$ para cada punto crítico $c \in \mathcal{C}$ encontrado en el punto anterior y se eligen $c_1, c_2 \in (a, b)$ con $f(c_1) = \text{mín}\, f(\mathcal{C})$, $f(c_2) = \text{máx}\, f(\mathcal{C})$.

iii) Se eligen $x_m, x_M \in \{c_1, c_2, a, b\}$ de tal modo que
$f(x_m) = \text{mín}\{f(c_1), f(c_2), f(a), f(b)\}$ y
$f(x_M) = \text{máx}\{f(c_1), f(c_2), f(a), f(b)\}$.

iv) El máximo de f se alcanza en x_M y su mínimo en x_m.

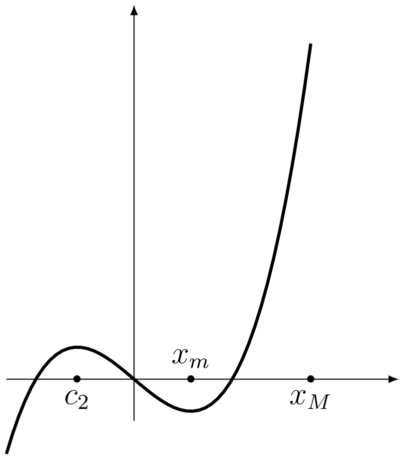
Ejemplo 6.1.4 *Se utilizará el procedimiento descrito arriba para hallar los valores extremos de la función* $f : [-1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^3 - x$.

i) $f'(x) = 3x^2 - 1$ *por lo que los puntos críticos vienen de resolver* $3x^2 = 1$*, es decir, el conjunto de puntos críticos es* $\mathcal{C} = \{-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3\}$.

ii) $f(-\sqrt{3}/3) = 2\sqrt{3}/9$ *y* $f(\sqrt{3}/3) = -2\sqrt{3}/9$ *por lo que se toma* $c_1 = \sqrt{3}/3$ *y* $c_2 = -\sqrt{3}/3$.

iii) $f(-1) = 0$*,* $f(3) = 24$ *por lo que se toma* $x_m = c_1 = \sqrt{3}/3$ *y* $x_M = 3$.

iv) *La función dada tiene un valor mínimo de* $-2\sqrt{3}/9$ *que se alcanza con* $x_m = c_1 = \sqrt{3}/3$ *y un valor máximo de* 24 *que se alcanza en el extremo superior del dominio* $x_M = 3$.



En la práctica suele tenerse una función que no es diferenciable en todo el dominio, pero lo es a trozos, en ese caso conviene analizar cada una de las regiones por separado y después comparar los extremos obtenidos en cada región. También para rayos o todo $\mathbb{R}$ conviene muchas veces *cortar* un intervalo $[a, b]$, analizar con el método explicado aquí dicho intervalo y analizar la monotonía o los límites al infinito en los rayos restantes. Para verificar que se entiende lo aquí explicado, se sugiere al lector resolver en este punto el ejercicio 6.1.5.

6.1.1. Ejercicios

Ejercicio 6.1.1 *Suponga que una función* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *alcanza su máximo en* $c_1 \in D$ *y su mínimo en* $c_2 \in D$. *Demuestre que si* $f(c_1) = f(c_2)$ *entonces la función es constante.*

Ejercicio 6.1.2 *Dé un ejemplo de una función continua y no constante* $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ *que alcance una infinidad de veces su máximo y una infinifad de veces su mínimo.*

Ejercicio 6.1.3 *Exhiba una función continua* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, cuyo conjunto de imágenes sea acotado tanto inferiormente como superiormente, pero que no alcance su máximo ni su mínimo.*

Ejercicio 6.1.4 *Encuentre valores para las constantes* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *para garantizar que la función* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *satisfaga las dos siguientes condiciones:*

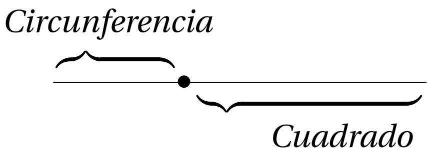
- f *tiene en* $x_0 = 1$ *un máximo relativo de valor* 7.
- *La gráfica de* $y = f(x)$ *pasa por el punto* $(2, -2)$.

Ejercicio 6.1.5 *Sea* $a > 0$. *Considere la función* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$g(x) = \frac{1}{1 + |x|} + \frac{1}{1 + |x - a|}.$$

Muestre que el valor máximo (i.e. absoluto) de g *está dado por* $(2 + a)/(1 + a)$.

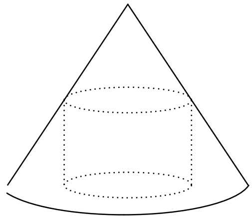
Ejercicio 6.1.6 *Se quiere cortar un alambre de* $10\,m$ *de largo en dos pedazos y hacer una circunferencia con una de las partes y un cuadrado con la otra. Determine cómo debe hacerse el corte de tal modo que el área total de las dos figuras obtenidas sea la mínima posible.*



Ejercicio 6.1.7 *Se tiene un alambre de $80cm$ el cual se quiere doblar en forma de rectángulo. Determine las dimensiones del rectángulo de mayor área posible.*

Ejercicio 6.1.8 *Sea $\mathbb{K}$ un cono circular recto de radio R y altura H.*

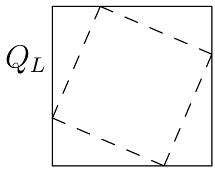
- *Encuentre las dimensiones (en términos de H y R) del cilindro circular recto de volumen máximo que puede ser inscrito en K.*



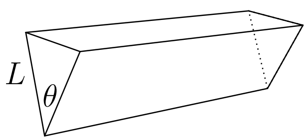
- *Utilice la parte anterior para el caso particular $R = 5cm$, $H = 12cm$ (este es el tamaño aproximado de los conitos de papel utilizados en algunas oficinas).*

Ejercicio 6.1.9 *Sean $n, m \in \mathbb{N}$ números naturales fijos. Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n(1-x)^m$ posee un máximo* relativo *en $n/(n+m)$.*

Ejercicio 6.1.10 *Sea $L > 0$ dado y sea Q_L un cuadrado de lado L. Encuentre la longitud del lado del cuadrado de* menor *área que puede ser inscrito en Q_L.*



Ejercicio 6.1.11 *La sección transversal de un bebedero de ganado de $3m$ de largo tiene la forma de un triángulo isósceles invertido. Éste fue construido con el requerimiento de que su capacidad sea la máxima posible.*

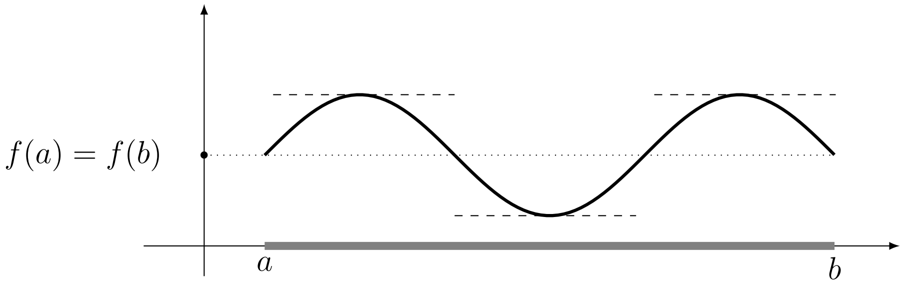


Utilice cálculo diferencial para determinar el tamaño del ángulo θ formado por los lados iguales, los cuales tienen una medida predeterminada $L\,m$.

6.2. Teorema de Rolle y T.V.M.

El teorema de valor medio (T.V.M.) es uno de los más importantes del cálculo diferencial, tanto a nivel teórico como a nivel de aplicaciones. Se comienza enunciado un caso particular (que de hecho implica el T.V.M. como se verá en las demostraciones, y por lo tanto es *equivalente*) que data de alrededor de 1691, y que es asociado al matemático Michael Rolle.

Teorema 6.2.1 (Teorema de Rolle) *Sean $a < b$ y $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua cuya restricción $f|_{(a,b)}$ es derivable.*
Si $f(a) = f(b)$ entonces existe por lo menos un $c \in (a,b)$ de tal modo que $f'(c) = 0$.



Demostración: Si la función f es constante entonces, por la proposición 5.1.1, la derivada es cero en todos lados y por lo tanto puede tomarse $c \in (a,b)$ arbitrario. Puede suponerse por lo tanto que f no es constante, en este caso f no coincide con la constante $f(a) = f(b)$ y por lo tanto debe existir $x_0 \in (a,b)$ tal que

$f(x_0) \neq f(a)$. En caso de que $f(x_0) > f(a)$ la función posee un máximo local (ojo, no se está afirmando que en x_0) y en caso de que $f(x_0) < f(a)$ un mínimo local (hacer un dibujo de las situaciones anteriores es de utilidad). En cualquiera de estos casos se tiene que $f|_{(a,b)}$ posee un extremo local, así que por el teorema de anulación de la derivada en extremos interiores (teorema 6.1.1) se sigue que existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

□

Teorema 6.2.2 (T.V.M.) *Sean $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua cuya restricción $f|_{(a,b)}$ es diferenciable. Existe entonces $c \in (a,b)$ de tal modo que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demostración: Sea $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$F(x) = f(x) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Esta función es claramente continua por las PA-FC y su restricción $F_{(a,b)}$ es derivable por las PA-FD; además se tienen claramente las igualdades

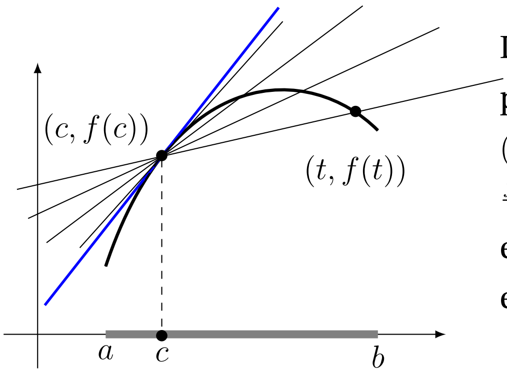
$$F(a) = f(a) = f(b) - [f(b) - f(a)] = F(b).$$

Del teorema de Rolle se sigue que existe $c \in (a,b)$ de tal forma que $F'(c) = 0$, así

$$0 = F'(c) \underset{\text{PA-FD}}{=} f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

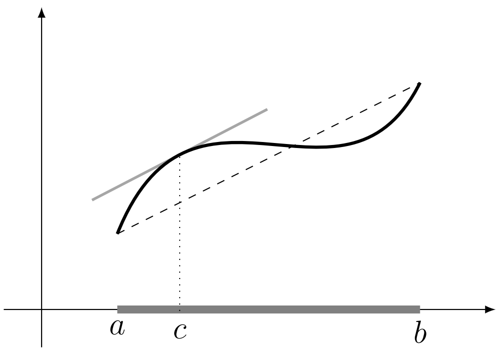
de donde se sigue el resultado. □

Una interpretación geométrica del T.V.M. requiere entender de manera geométrica a la derivada, es algo clásico que no puede faltar en un libro de cálculo diferencial, por eso se hará ahora. Primero que nada, la derivada en un punto $f'(c)$ resulta ser la pendiente de la recta tangente en el punto $(c, f(c))$ a la gráfica de la función f, el proceso al límite de las secantes pasando por $(c, f(c))$ de dicha gráfica lleva a la tangente. La siguiente figura es mucho más aclaratoria que mil palabras:



La secante determinada por los puntos $(c, f(c))$ y $(t, f(t))$ tiene pendiente $\frac{f(c)-f(t)}{c-t}$; el límite de esta expresión cuando $t \to c$ es precisamente $f'(c)$.

Ahora bien, el T.V.M. dice entonces que la pendiente de la secante entre los puntos extremos de la gráfica de f se alcanza como derivada de algún punto interior, es decir, al menos una tangente de un punto interior tiene esa pendiente, la figura siguiente ilustra la situación.



El siguiente resultado es una de las consecuencias más importantes del T.V.M..

Proposición 6.2.1 *Sea* $I \subset \mathbb{R}$ *abierto y* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función derivable. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) f *es localmente constante, i.e. para cada* $x \in I$ *existe un intervalo abierto* $I_x \subset I$ *tal que* $f|_{I_x}$ *es constante.*

b) $f'(x) = 0$ *para toda* $x \in I$*.*

Demostración: Claramente $a) \Rightarrow b)$ así que solo resta demostrar que $b) \Rightarrow a)$. Sea $x \in I$, como I es abierto es unión de algunos de los siguientes conjuntos: intervalos abiertos, rayos abiertos o bien todo $\mathbb{R}$. Observe que en todos los casos anteriores se puede encontrar $I_x \subset I$ intervalo abierto conteniendo a x. Se quiere demostrar que $f|_{I_x}$ es constante. Sean $a, b \in I_x$, $a < b$. f es continua en $[a, b] \subset I_x$ y derivable en (a, b) por lo que, del T.V.M., se sigue que existe $c \in (a, b)$ de tal modo que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) = 0$$

de donde necesariamente se sigue $f(a) = f(b)$; esto prueba que $f|_{I_x}$ es constante. $\square$

Es de observarse que la demsotración anterior demuestra en particular el siguiente resultado que es muy útil en la práctica.

Corolario 6.2.1 *Sea* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalo abierto. Si la función* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *es derivable con derivada cero en todo punto entonces* f *es constante.*

6.2.1. Ejercicios

Ejercicio 6.2.1 *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable.*

a) *Demuestre que si $f(x) = 0$ tiene $n+1$ soluciones distintas entonces $f'(x) = 0$ tiene al menos n soluciones distintas.*

b) *Muestre que si además f es n-veces diferenciable entonces la ecuación $f^{(n)}(x) = 0$ tiene al menos una solución.*

Ejercicio 6.2.2 *Considere los siguientes enunciados sobre polinomios con coeficientes reales.*

a) *Todo polinomio de grado 2 tiene a lo más 2 raíces reales.*

b) *Todo polinomio de grado 3 tiene a lo más 3 raíces reales.*

Utilice el teorema de Rolle para demostrar que $a)$ implica $b)$.

Ejercicio 6.2.3 *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un rayo o todo $\mathbb{R}$. Demuestre que si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable y la derivada en cada punto es cero entonces f es una función constante.*
Sugerencia: *Para x fijo considere conjuntos de la forma*

$$A_x = \{t \in I : t > x,\ f \text{ es constante en } [x,t]\}.$$

Ejercicio 6.2.4 *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface que para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple que $|f(a) - f(b)| \leq (a-b)^2$. Demuestre que f es constante.*
Sugerencia: *Empiece demostrando que f es derivable. ¿Quién debe ser la derivada?*

Ejercicio 6.2.5 *Sea $I \subset_{ab} \mathbb{R}$ un intervalo y sean $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables tales que $gf' - fg' = 0$. Suponga también* *que* $a, b \in I$*,* $a < b$ *son ceros consecutivos de* f*, es decir,* f *se anula en* a *y en* b *pero* ***no*** *se anula en ningún punto de* (a, b)*. Muestre que si* $g(a)$*y* $g(b)$ *no son ambos cero entonces existe* $\xi \in (a, b)$ *tal que* $g(\xi) = 0$*.*

Ejercicio 6.2.6 *Suponga que las funciones* $f, g, h : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *son continuas en todo* $[0, 1]$ *y derivables en* $(0, 1)$*. Demuestre que existe* $\xi \in (0, 1)$ *de tal manera que*

$$\det \begin{pmatrix} f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \\ f(0) & g(0) & h(0) \\ f(1) & g(1) & h(1) \end{pmatrix} = 0.$$

Ejercicio 6.2.7 *Sea* $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua y tal que posee segunda derivada* g'' *en todo* (a, b)*. Suponga que el segmento de recta que une el punto* $(a, g(a))$ *con el punto* $(b, g(b))$ *intersecta a la gráfica de* g *en un tercer punto* $(c, g(c))$*,* $c \in (a, b)$*. Muestre que entonces* g'' *posee un cero en (a,b).*

Ejercicio 6.2.8 *Demuestre que no interesa qué valor tome* $k \in \mathbb{R}$ *no podrá lograrse que la ecuación*

$$x^{2019} + 2018x + k = 0$$

tenga más de una solución.

Ejercicio 6.2.9 *Sean* $0 < a < b$*. Utilice el T.V.M. y la función* $1/x$ *para demostrar que la media geométrica* $\sqrt{ab}$ *de* a *y* b *se encuentra en el intervalo* (a, b)*.*

Ejercicio 6.2.10 *Sean* $0 < x < k < y$ *números reales dados. Muestre que*

$$\frac{\ln(y) - \ln(k)}{y - k} < \frac{\ln(k) - \ln(x)}{k - x}$$

Ejercicio 6.2.11 (T.V.M.-Cauchy) *Demuestre la siguiente generalización del T.V.M.: Sean $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas y tales que $f|_{(a,b)}$ y $g|_{(a,b)}$ son diferenciables. Suponga que $g'(x) \neq 0$ para toda $x \in (a,b)$. Existe entonces $c \in (a,b)$ de tal forma que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

No olvide mencionar por qué puede escribirse como denominador a la diferencia $g(b) - g(a)$. Diga también el por qué se dice que el T.V.M.-Cauchy es una generalización del T.V.M. (¿a qué caso particular del T.V.M.-Cauchy corresponde el T.V.M.?).

Ejercicio 6.2.12 *Sean $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ como en las hipótesis del ejercicio anterior. Demuestre que si las secantes de la gráficas de f y g uniendo los puntos extremos tiene la misma pendiente entonces existe $c \in (a,b)$ de tal modo que las rectas tangentes L_f y L_g a las gráficas de f y g en los puntos $(c, f(c))$ y $(c, g(c))$ respectivamente, tienen la misma pendiente.*

6.3. Análisis de monotonía y extremos locales

El T.V.M. también facilita el estudio de monotonía de una función, como se podrá apreciar en esta sección.

Definición 6.3.1 *Sea $D \subset \mathbb{R}$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera. Se dice que f es*

- ***monótona creciente*** *si para toda $x, y \in D$ con $x < y$ se tiene que $f(x) \leq f(y)$. Si esta última desigualdad se puede po-*

ner siempre estricta entonces la función se dice ***estrictamente monótona creciente***.

- ***monótona decreciente*** *si para toda* $x, y \in D$ *con* $x < y$ *se tiene que* $f(x) \geq f(y)$. *Si esta última desigualdad se puede poner siempre estricta entonces la función se dice* ***estrictamente monótona decreciente***.

Se dice que f *es monótona si cumple alguna de los tipos de monotonía anteriores.*

El ejercicio 6.3.1 da ejemplos sencillos de funciones monótonas.

Proposición 6.3.1 *Sea* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua tal que* $f|_{(a,b)}$ *es diferenciable. Si* $f'(x) > 0$ *para toda* $x \in (a, b)$ *(respectivamente* $f'(x) < 0$ *para toda* $x \in (a, b)$*) entonces* f *es estrictamente monótona creciente (respectivamente estrictamente monótona decreciente).*

Demostración: Solo se demostrará el caso $f' > 0$ siendo el otro completamente análogo. Sean $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$; del T.V.M. se puede encontrar $c \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ de tal modo que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Debe observarse ahora que tanto $f'(c)$ como $(x_2 - x_1)$ son positivos, así que su producto debe también serlo, es decir $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c)$ es positivo, de donde $f(x_1) < f(x_2)$. □

En la práctica no siempre se tiene que el dominio es un intervalo pero el análisis puede reducirse a este caso, a continuación se verá un ejemplo de esto (este ejemplo es importante en los cursos de análisis matemático, concretamente cuando se estudian espacios métricos).

Ejemplo 6.3.1 *Considere la función $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Se tiene entonces que f es monótona creciente. En efecto, sean $0 < a < b$, se quiere ver que $f(a) < f(b)$, para esto sea $B > b$ y sea $g := f|_{[0,B]}$; $g : [0, B] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y diferenciable en el abierto $(0, B)$ con*

$$g'(x) = \frac{(1 + x) - (x)}{(1 + x)^2} = \frac{1}{(1 + x)^2} > 0.$$

Esto muestra que g es estrictamente monótona creciente y como $g = f|_{[0,B]}$ se concluye en particular que $f(a) < f(b)$. El lector detallista notará que falta el caso $a = 0$, este es trivial pues $f(0) = 0 < f(x)$ para toda $x > 0$.

De la proposición 6.3.1 se puede derivar un método para concluir que en un punto c del dominio de una función se tiene un extremo local, esto es lo que se pide que argumente el lector en el ejercicio 6.3.5. Se recomienda al lector resolver el ejercicio antes de continuar con la lectura, pues se utilizará en la demostración del siguiente resultado.

Teorema 6.3.1 (Criterio de la segunda derivada) *Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable y suponga que $c \in (a, b)$ satisface que $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$ (o respectivamente $f''(c) < 0$). Se tiene entonces que f tiene un mínimo (respectivamente máximo) local en c.*

Demostración: Nuevamente sólo se demostrará el caso en que $f''(c) > 0$ siendo el otro caso análogo. Sea $F : (a - c, b - c) \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$F(t) = \begin{cases} \frac{f'(c+t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ f''(c) & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Por las hipótesis se tiene que F es continua y además satisface que $F(0) = f''(c) > 0$, por lo que, por el teorema de la preservación del signo para límites de funciones (teorema 3.2.2), se tiene que existe $\delta > 0$ de tal modo que $U_\delta(0) \subset (a-c, b-c)$ y $F(t) > 0$ para todo $t \in U_\delta(0)$. Para cualquier $t \in U_\delta(0) = (-\delta, \delta)$, se tiene entonces que $f'(c+t) = F(t)t$ y como $F(t) > 0$ el signo de $f'(c+t)$ depende de t; se tiene que $f'(c+t) > 0$ si $t > 0$ y $f'(c+t) < 0$ si $t < 0$, así que por el ejercicio 6.3.5 se sigue que f tiene un mínimo local en c.

□

Para terminar esta sección se demostrará el siguiente resultado el cual es muy útil para concluir que ciertas funciones tienen inversas derivables.

Teorema 6.3.2 *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona creciente y sea $g : [f(a), f(b)] \longrightarrow [a, b]$ su inversa (vea ejercicios 6.3.2 y 6.3.4). Si f es derivable en $c \in (a, b)$ y $f'(c) \neq 0$ entonces g es derivable en $d := f(c)$ y además $g'(d) = 1/f'(c)$.*

Demostración: Del corolario 5.2.3 sólo se necesita ver que g es diferenciable en d. Se comenzará viendo que g es continua en d. Para esto sea $\varepsilon > 0$, se puede pensar que ε es suficientemente pequeño para que $c-\varepsilon$ y $c+\varepsilon$ sean elementos de (a, b). Sea $\delta > 0$ de tal modo que

$$\delta < \text{mín}\{f(c) - f(c-\varepsilon), f(c+\varepsilon) - f(c)\}.$$

Esta δ es la que ayudará: Sea $y \in [f(a), f(b)]$ con $|y-d| < \delta$, se tiene entonces que $y - d < \delta < f(c+\varepsilon) - d$, de donde $y < f(c+\varepsilon)$ y así $g(y) < c+\varepsilon$. Similarmente de $-\delta < y-d$ se sigue que $c-\varepsilon < g(y)$, que junto con lo anterior nos dice que $c-\varepsilon < g(y) < c+\varepsilon$, es

decir $|g(y) - g(d)| < \varepsilon$ (recuerde $g(d) = c$).
Ahora sí, es turno de demostrar la diferenciabilidad de g en d. Sea $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una sucesión convergente a cero. Se quiere analizar el cociente

$$\frac{g(d+s_n) - g(d)}{s_n}$$

cuando $s_n \longrightarrow 0$. Sea $h_n := g(d+s_n) - g(d)$, de la continuidad de g en d se tiene que $h_n \longrightarrow 0$ si $s_n \longrightarrow 0$. Ahora bien, $g(d+s_n) = h_n + g(d) = h_n + c$ de donde $d + s_n = f(h_n + c)$ y así $s_n = f(h_n+c) - d = f(h_n+c) - f(c)$. Por último, de lo estricto de la monotonía, $s_n \neq 0$ si y solo si $h_n \neq 0$. Se tiene entonces que

$$\frac{g(d+s_n) - g(d)}{s_n} = \frac{h_n}{f(c+h_n) - d} = \frac{1}{\frac{f(c+h_n) - f(c)}{h_n}}$$

con lo cual, al tomar límites cuando $s_n \longrightarrow 0$ se tiene que $h_n \longrightarrow 0$ y el lado derecho de la igualdad anterior tiende entonces a $1/f'(c)$, en resumen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(d+s_n) - g(d)}{s_n} = \frac{1}{f'(c)}.$$

Lo anterior se tiene para una sucesión arbitraria $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que tiende a cero, así que, por el teorema 3.3.1, se tiene que $g'(d) = 1/f'(c)$.

$\square$

6.3.1. Ejercicios

Ejercicio 6.3.1 *Demuestre que toda función afín es monótona.*

Ejercicio 6.3.2 *Demuestre que si la función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente monótona entonces su restricción $f : [a,b] \longrightarrow f(a,b)$ es biyectiva y por tanto posee una inversa la cual es también monótona. ¿Se tiene el mismo resultado si la monotonía no es estricta?*

Ejercicio 6.3.3 *Analice la monotonía de la función* $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = 1/(1 + x)$.

Ejercicio 6.3.4 *Sea* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua y estrictamente monótona creciente (decreciente). Demuestre que* $f[a, b] = [f(a), f(b)]$ *(respectivamente que* $f[a, b] = [f(b), f(a)]$*).*

Ejercicio 6.3.5 ***(Criterio de la primera derivada para extremos locales)*** *Sea* $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua y tal que es derivable en cada punto, salvo quizás en* $c \in (a, b)$. *Demuestre que si* $f'(x) < 0 < f'(y)$ *para cualesquiera* $x \in (a, c)$ *y* $y \in (c, b)$ *entonces* f *posee un mínimo local en* c. *¿Es este mínimo global?*
Modifique las condiciones del enunciado anteior para que la conclusión sea el tener un máximo local.

6.4. Un poco más sobre exponenciales y logaritmos

En esta parte se hará uso del teorema 6.3.2 para analizar las funciones exponencial y logaritmo más de cerca.
Para empezar debe observarse que para $a > 1$ se tiene que la función $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto a^x$ tiene las siguientes propiedades (vea la proposición 5.1.2 y el ejercicio 3.4.4).

- f_a es derivable en 0 y $f_a'(0) = \ln(a)$.
- f_a es derivable en todo punto $x \in \mathbb{R}$ y de hecho $f_a'(x) = f_a'(0)f_a(x) = \ln(a)a^x$.
- $f_a'(0) \neq 0$ pues f_a no es función constante.

- Como $a > 1$ se tiene que f_a es estrictamente monótona creciente, de hecho $f_a(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$; por lo tanto f_a tiene una función inversa.

El último punto requiere utilizar el hecho de que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty$ y la continuidad de f_a. De manera similar al ejercicio 6.3.2 puede demostrarse (se recomienda al lector hacerlo) que f_a es una función invertible.

Definición 6.4.1 *A la función inversa de* $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$*, donde* $a > 1$*, se llama* ***logaritmo de base*** a *y se le denota por*
$\log_a : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$.

No debe de confundirse la definición anterior con la de logaritmo que se dio en el ejercicio 3.4.4, a ese logaritmo se le llamará desde ahora y hasta el resto del texto *logaritmo natural.* En breve se verán relaciones entre el logaritmo de base a definido aquí y el logaritmo natural.

Puede mostrarse con las mismas técnicas que las del teorema 6.3.2 que f_a tiene una inversa derivable, vea el ejercicio 6.4.1; usando dicho ejercicio se puede concluir lo siguiente.

Proposición 6.4.1 *La función* $\log_a : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *es derivable y su derivada cumple*

$$\log_a'(x) = \frac{1}{f_a'(0)x} = \frac{1}{\ln(a)x}.$$

Además dicha función posee las siguientes propiedades.

- $\log_a(a^x) = x$ *y en particular* $\log_a(a) = 1$.

- $a^{\log_a(y)} = y$ *y en particular* $a^{\log_a(1)} = 1 = a^0$ *de donde* $\log_a(1) = 0$.

- $z = a^x$ *si y solo si* $x = \log_a(z)$.

Es importante observar que si se encontrara un cierto $E > 1$ con la propiedad de que $f_E'(0) = 1$ entonces se tendría que $f_E' = f_E$, $\ln(E) = 1$ y que $\log_E'(x) = 1/x$. Las primeras dos propiedades determinan de modo único a una función (vea el ejercicio 6.4.2), toda vez que una tal función exista.
Para analizar la existencia de un tal E se fija $a > 1$, por la definición del logaritmo natural se tiene, para un cierto $y \in \mathbb{R}$, que

$$\ln(a^y) = \lim_{x\to 0} \frac{(a^y)^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{a^{yx} - 1}{yx} y = \ln(a)y$$

donde en la última igualdad se aplicó continuidad con el hecho de que $yx \longrightarrow 0$ si $x \to 0$; se tiene entonces que $\ln(a^y) = y\ln(a)$ (esto resuelve uno de los puntos del ejercicio 3.4.4). Como f_a no es función constante, no puede tenerse que $\ln(a) = f_a'(0) = 0$, por lo que es posible escoger un y de tal modo que $\ln(a)y = 1$, es decir, de tal modo que $f_{a^y}'(0) = \ln(a^y) = 1$ (y no es otra cosa que $1/\ln(a)$).
Lo que se hará a continuación es ver que el número $a^{1/\ln(a)}$ es independiente de a y que de hecho es precisamente el número de Euler e (definición 2.5.1).

Teorema 6.4.1 *Para cualquier* $a > 1$ *el número* $a^{1/\ln(a)}$ *es independiente del valor de* a*, de hecho* $a^{1/\ln(a)} = e$.

Demostración: Sea $a > 1$ y sea E el número $a^{1/\ln(a)}$. De la consideración previa se tiene que $1 = f_E'(0) = f_E(0)$ de donde, por definición de la inversa de una función, se tiene $\log_E(1) = 0$, con esto se obtiene que

$$\log'_E(1) = \frac{1}{f'_E(\log_E(1))} = \frac{1}{f'_E(0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Se tiene de lo anterior que $1 = \lim_{x\to 0} \frac{\log_E(1+x)-\log_E(1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\log_E(1+x)}{x}$ y como la función $\log_E$ es continua, se sigue en particular que $1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_E(1+1/n)}{1/n}$; usando ahora la continuidad de $f_E(x) = E^x$ se tiene

$$\begin{aligned} E = E^1 &= \lim_{n\to\infty} E^{\frac{\log_E\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(E^{\log_E\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \end{aligned}$$

□

Corolario 6.4.1 *Se tiene para toda* $x \in \mathbb{R}$ *que* $(e^x)' = e^x$ *y* $\log'_e(x) = 1/x$*; también se tiene* $\ln(e) = 1$.

Demostración: Esto es justo la construcción de $E = e$. □

Se concluye este capítulo mostrando que $\log_e = \ln$.

Proposición 6.4.2 *Para cada* $x \in (0, +\infty)$ *se tiene que* $\log_e(x) = \ln(x)$.

Demostración: Dado $x \in (0, +\infty)$ puede escribirse a x como $x = e^b$ para algún $b \in \mathbb{R}$ (suprayectividad de f_e). Ahora bien,

$$\ln(x) = \ln(e^b) \underset{\text{Ejer. 3.4.4}}{=\!=\!=} b\ln(e) \underset{\text{coro. 6.4.1}}{=\!=\!=} b = \log_e(e^b) = \log_e(x).$$

□

Corolario 6.4.2 *La función* $\ln : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *es diferenciable con* $\ln'(x) = 1/x$.

6.4.1. Ejercicios

Ejercicio 6.4.1 *Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ *una función estrictamente monótona creciente y biyectiva la cual es derivable para la cual* $f'(x) \neq 0$ *para toda* $x \in \mathbb{R}$. *Demuestre que la función inversa* f^{-1} *es también derivable.*

Ejercicio 6.4.2 *Suponga que las funciones* $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ *son derivables, satisfacen que* $f(0) = g(0) = 1$ *y también que* $f' = f$ *y* $g' = g$. *Demuestre que necesariamente* $f = g$.
Sugerencia: *Analice el cociente* f/g.

Ejercicio 6.4.3 ($\exp(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^{\mathbf{x}}$**)** *Suponiendo que la función* $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *determinada por* $\exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ *es derivable y que la derivada se puede calcular derivando cada sumando (cosa que* ***no*** *es cierta en general, como estudiará en el curso de Cálculo 2) demuestre que* $\exp(x) = e^x$.
Sugerencia: *Utilice el corolario 6.4.1 y el ejercicio anterior.*

Ejercicio 6.4.4 *Usando que las funciones* $\log_a$, *para* $a > 1$, *son estrictamente monótonas crecientes, de otra demostración para la independencia de* $a^{1/\ln(a)}$ *respecto al valor de* a *(teorema 6.4.1).*

7 La regla de L'Hôpital y sus variantes

Este último capítulo está dedicado a la llamada regla de L'Hôpital, que es una consecuencia importante del teorema de Rolle visto antes, provee un método para calcular límites indeterminados para los cuales no pueden aplicarse directamente las PA-LF.

7.1. Primera versión de la regla de L'Hôpital.

Los siguientes resultados harán uso del T.V.M.-Cauchy, por lo que se recomienda al lector resolver el ejercicio 6.2.11 antes de continuar con la lectura.

Teorema 7.1.1 (Regla de L'Hôpital) *Sean $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables y tales que*

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.
- *Existe* $L = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *(i.e.* $L \in \mathbb{R}$*).*

Se tiene entonces que existe el límite $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *y además coincide con*

L. Un resultado análogo se tiene cuando se cambia $x \to b$ en todos los lugares donde se tiene $x \to a$.

Demostración: Sea$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (a,b)$ una sucesión de puntos distintos de a pero convergiendo al punto a; el objetivo es demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = L$. Es posible fijar $\delta > 0$ de tal modo que $I_\delta := (a, a+\delta) \subset (a,b)$ y tal que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in I_\delta$, esto debe tenerse para que el segundo de los puntos en las hipótesis tenga sentido. Sean $\widetilde{f}, \widetilde{g} : [a, a+\delta/2] \longrightarrow \mathbb{R}$, las funciones dadas por

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases} \qquad \widetilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x > a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

Se puede pensar, sin pérdida de generalidad, que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (a, a+\delta/2)$; utilizando que las funciones $\widetilde{f}$ y $\widetilde{g}$ son continuas y derivables en $(a, a+\delta/2)$, se tiene, del T.V.M.-Cauchy aplicado sobre $[a, x_n]$, que existe $y_n \in (a, x_n)$ de tal forma que

$$\frac{f'(y_n)}{g'(y_n)} = \frac{\widetilde{f}'(y_n)}{\widetilde{g}'(y_n)} \underset{\text{T.V.M.-Cauchy}}{=\!=\!=} \frac{\widetilde{f}(x_n) - \widetilde{f}(a)}{\widetilde{g}(x_n) - \widetilde{g}(a)} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$$

Ahora bien, de $a < y_n < x_n$ y la ley de estricción (teorema 2.4.2), se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, se sigue entonces que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(y_n)}{g'(y_n)} = L$$

$\square$

Una consecuencia del teorema anterior es el siguiente resultado, al que también se hace referencia como regla de L'Hôpital, dicho resultado se obtiene al aplicar el teorema anterior junto con el ejercicio 3.5.5.

Corolario 7.1.1 *Sea $c \in (a, b)$ y sean $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables y tales que*

- $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to c} g(x)$.
- *Existe* $L = \lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *(i.e. $L \in \mathbb{R}$).*

Se tiene entonces que existe el límite $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además coincide con L.

Demostración: Considere las funciones $f_+ := f|_{(c,b)}$, $g_+ := g|_{(c,b)}$, $f_- := f|_{(a,c)}$ y $g_- := g|_{(a,c)}$. Aplique entonces el teorema anterior sobre las funciones correspondientes en (a, c) y en (c, b). $\square$

Las versiones anteriores de la regla de L'Hôpital son referenciadas comúnmente como los casos de indeterminación $0/0 = L \in \mathbb{R}$. En la sección siguiente se analizarán las indeterminaciones del tipo $\infty/\infty = L \in \mathbb{R}$ y las del tipo $+\infty/+\infty = +\infty$.

7.1.1. Ejercicios

Ejercicio 7.1.1 *Demuestre a detalle el corolario 7.1.1.*

Ejercicio 7.1.2 *Utilice el teorema de L'Hôpital para dar otra demostración de los límites notables estudiados en la sección 3.4.*

7.2. Otras dos versiones del teorema de L'Hôpital

7.2.1. Versión $\infty/\infty = L \in \mathbb{R}$

Teorema 7.2.1 (2V-Teorema de L'Hôpital) *Sean $I \subset \mathbb{R}$ abierto y $a \in I$. Sean $f, g : I - \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables, g' nunca se anula. Suponga además que*

- $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = \lim\limits_{x \searrow a} g(x) = +\infty$,
- $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$.

Se tiene entonces que $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe y coincide con L.
Enunciados análogos válidos se obtienen si se cambian todas las flechas $x \searrow a$ por $x \nearrow a$ (y consecuentemente por $x \to a$), o si se cambia $+\infty$ por $-\infty$.

Demostración: Se utilizará ahora la versión $\varepsilon - \delta$ para demostrar $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta_1 > 0$ de tal modo que $(a, a+\delta_1) \subset I$ y cumpliendo

$$0 < x - a < \delta_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $b = a + \delta_1/2$; para $x \in (a, b)$ se puede encontrar (por el T.V.M.-Cauchy) $c_x \in (x, b)$ de tal modo que

$$\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)}.$$

Como $a < x < c_x < b < a + \delta_1$ se tiene que $0 < c_x - a < \delta_1$ de donde $\left|\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - L\right| < \varepsilon/2$. Ahora bien

$$\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)} = \frac{\frac{f(b)}{g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\frac{g(b)}{g(x)} - 1} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(b)}{g(x)}}{1 - \frac{g(b)}{g(x)}}$$

con lo cual (después de realizar operaciones aritméticas) se tiene

$$\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \left[\left(\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\right)\frac{g(b)}{g(x)} - \frac{f(b)}{g(x)}\right] + \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Sea $r(x) := \frac{f(b)}{g(x)} - \left(\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\right)\frac{g(b)}{g(x)}$, así la expresión anterior queda

$$\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(x)}{g(x)} - r(x).$$

Debe observarse que para $x \in (a,b)$ se tiene

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| \leq \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| + |L| < \frac{\varepsilon}{2} + |L| =: M$$

y entonces

$$|r(x)| \leq \left|\frac{f(b)}{g(x)}\right| + M\left|\frac{g(b)}{g(x)}\right|. \tag{7.1}$$

El valor de $b = a + \delta_1/2$ es independiente de la $x \in (a,b)$, por lo que si $x \to a$ entonces $g(b)/g(x) \to 0$ y $f(b)/g(x) \to 0$ pues $g(x) \to +\infty$. Usando ahora (7.1) se tiene que $\lim\limits_{x \searrow a} r(x) = 0$ y por lo tanto es posible encontrar $\delta > 0$ de tal modo que $\delta < \delta_1/2$ y de tal forma que $|r(x)| < \varepsilon/2$ siempre que $0 < x - a < \delta$. Esta δ es la que funciona, en efecto, para $0 < x - a < \delta$ se tiene

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| &\leq \left|\left(\frac{f(x)}{g(x)} - r(x)\right) - L\right| + |r(x)| \\ &= \left|\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - L\right| + |r(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Esto termina la demostración. $\square$

7.2.2. Versión $\infty/\infty = \infty$

Se termina esta obra con el siguiente caso del teorema de L'Hôpital.

Teorema 7.2.2 (3V-Teorema de L'Hôpital) *Sean $I \subset \mathbb{R}$ abierto y $a \in I$. Sean $f, g : I - \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables, g' nunca se anula. Supongase además que*

- $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = \lim\limits_{x \searrow a} g(x) = +\infty$,
- $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$.

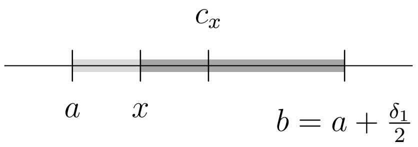
Se tiene entonces que $\lim\limits_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.
Enunciados análogos válidos se obtienen si se cambian todas las flechas $x \searrow a$ por $x \nearrow a$ (y consecuentemente por $x \to a$).

Demostración: Sea $N > 0$, se busca $\delta > 0$ de tal modo que, siempre que se tenga $x \in I$, $0 < x - a < \delta$, entonces también se tenga que $f(x)/g(x) > N$.Sea $M = 4N$, se tiene que existe $\delta_1 > 0$ con $(a, a + \delta_1) \subset I$ y tal que:

$$x \in (a, a + \delta_1) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{f'(x)}{g'(x)} > M = 4N.$$

Sea $b := a + \frac{\delta_1}{2}$ fijo y sea $x \in (a, b)$. Por el T.V.M.-Cauchy existe $c_x \in (x, b)$ de tal modo que

$$\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)}$$



Como $0 < c_x - a < \delta_1$ se tiene de lo anterior que

$$M < \frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(b)}{g(x)}}{1 - \frac{g(b)}{g(x)}}, \tag{7.2}$$

igualdad cierta para cualquier $x \in \left(a, a + \frac{\delta_1}{2}\right) = (a, b)$. Como $\lim\limits_{x \searrow a} g(x) = +\infty$ se tienen

$$\lim_{x \searrow a} \left(1 - \frac{g(b)}{g(x)}\right) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \searrow a} \frac{f(b)}{g(x)} = 0,$$

por lo que se puede elegir un $\delta_2 > 0$ satisfaciendo $\delta_2 < \delta_1/2$ y de tal modo que

$$0 < x - a < \delta_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \left|\frac{g(b)}{g(x)}\right| = \left|\left(1 - \frac{g(b)}{g(x)}\right) - 1\right| < \frac{1}{2} \\ \\ \left|\frac{f(b)}{g(x)}\right| < \frac{M}{4} \end{cases}$$

Usando propiedades básicas de valores absolutos se tiene que si x satisface $0 < x - a < \delta_2$ entonces se tiene que $1 - \frac{g(b)}{g(x)} > \frac{1}{2}$ (en particular positivo), así como $f(b)/g(x) > -\frac{M}{4}$. Con esto último y 7.2 obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &> M\left(1 - \frac{g(b)}{g(x)}\right) + \frac{f(b)}{g(x)} \\ &> M\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{M}{4} = \frac{M}{4} = N. \end{aligned}$$

Todo lo anterior muestra que $\delta_2 > 0$ tiene la propiedad de que si $0 < x - a < \delta_2$ entonces $f(x)/g(x) > N$.

□

7.2.3. Ejercicios

Ejercicio 7.2.1 *Demuestre que la función exponencial crece más rápido que cualquier polinomio dado. De modo explícito, sea $p(x)$ algún polinomio con coeficiente líder $c \neq 0$. Demuestre que*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{p(x)} = \pm\infty,$$

donde el signo del límite debe tomarse igual que el signo de c.

Palabras finales

Como se dijo anteriormente, este texto está adaptado a lo que realmente se puede cubrir durante un semestre en un curso de cálculo diferencial, según los programas educativos en México, hay muchos temas que son importantes y que se han dejado fuera; por lo tanto es recomendable que el lector continúe su formación con los textos clásicos citados en la bibliografía. Como se ha mencionado en partes de este texto y en ejercicios, algunos temas que clásicamente formarían parte del primer curso de cálculo (como continuidad uniforme de funciones) forman ahora parte de un segundo curso de cálculo, pero en ese sentido, un preliminar al cálculo integral real, que sería el tema central de ese segundo curso.

Por último, es importante mencionar que las matemáticas se aprenden resolviendo ejercicios, no sólo viendo demostraciones. Los ejercicios de este texto han sido *fraccionados* para que el lector pueda ir paso a paso al resolverlos, sin embargo se recomienda probar resolver otros ejercicios adicionales a estos para ver si se han madurado suficientemente los temas aprendidos, al grado de poder entonces resolver problemas en su planteamiento clásico, esto es, sin sugerencias ni pasos intermedios dados como ayuda.

R.A.Q.E

Bibliografía

[1] S. Abbott. *Understanding Analysis.* Editorial Springer (UTM), 2016.

[2] T. M. Apostol. *Calculus I.* (Reimpresión 2013). Editorial Reverté, 1990.

[3] O. Forster. *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen.* (12a Edición, en idioma alemán). Springer-Spektrum, 2016.

[4] A. Bartholomé; J. Rung; H. Kern. *Zahlentheorie für Einsteiger.* (7a Edición, en idioma alemán). Vieweg+Teubner Verlag, 2010.

[5] L. Leithold. *El Cálculo.* (7a Edición). Oxford University Press, 1998.

[6] M. Spivak. *Calculus.* Editorial Reverté, 2012.

Índice alfabético

T

V